



OSTBAYERISCHE  
TECHNISCHE HOCHSCHULE  
REGENSBURG

ELEKTRO- UND  
INFORMATIONSTECHNIK

# **Elektrische Messtechnik 1**

## **Bachelor Mechatronik**

Thomas Fuhrmann

Heiko Unold

Wintersemester 2021/22

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Was bedeutet Messen? . . . . .	1
1.2	Gründe für Messungen . . . . .	1
1.3	Messsystem . . . . .	2
1.4	Allgemeine Begriffe . . . . .	2
1.5	Einheiten . . . . .	4
1.6	Präfixe . . . . .	7
1.7	Logarithmische Maße . . . . .	7
	1.7.1 Relative Maße . . . . .	8
	1.7.2 Absolute Maße . . . . .	8
1.8	Rechengrößen . . . . .	8
	1.8.1 Periodendauer (period) & Frequenz (frequency) . . . . .	8
	1.8.2 Scheitelwert (peak) . . . . .	9
	1.8.3 Schwingungsbreite (peak to peak) . . . . .	9
	1.8.4 Gleichanteil (mean) . . . . .	9
	1.8.5 Gleichrichtwert (rectified value) . . . . .	9
	1.8.6 Effektivwert (root mean square) . . . . .	10
	1.8.7 Scheitelfaktor (peak factor) . . . . .	10
	1.8.8 Formfaktor (form factor) . . . . .	10
	1.8.9 Welligkeit (ripple) . . . . .	10
	1.8.10 Klirrfaktor, Total Harmonic Distortion . . . . .	11
1.9	Systematisches Messen . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Messunsicherheiten</b>	<b>12</b>
2.1	Einleitung . . . . .	12
2.2	Genauigkeiten . . . . .	13
	2.2.1 Zahl gültiger Stellen . . . . .	13
	2.2.2 Auflösung . . . . .	15
	2.2.3 Absolutgenauigkeit - Absolutfehler . . . . .	16
	2.2.4 Relative Genauigkeit (Linearität) . . . . .	17
	2.2.5 Auflösung - Linearität - Absolutgenauigkeit . . . . .	18
2.3	Fehlerarten . . . . .	18
	2.3.1 Welche Arten von Fehlern gibt es? . . . . .	18
	2.3.2 Statistische Fehler . . . . .	18
	2.3.3 Systematische Fehler . . . . .	19

2.3.4	Quantisierungsfehler . . . . .	20
2.4	Fehlergrenzen bei Messgeräten . . . . .	22
2.4.1	Fehlerklassen bei Analoggeräten . . . . .	22
2.4.2	Messabweichung bei Digitalgeräten . . . . .	23
2.5	Mittelwerte . . . . .	24
2.5.1	Arithmetisches Mittel . . . . .	24
2.5.2	Geometrisches Mittel . . . . .	24
2.5.3	Medianwert . . . . .	24
2.5.4	Modalwert . . . . .	25
2.6	Approximationsverfahren . . . . .	25
2.6.1	Geradenapproximation . . . . .	25
2.6.2	Polynomapproximation . . . . .	26
2.6.3	Spline-Approximation . . . . .	27
2.6.4	Analytische Approximation . . . . .	27
2.7	Verteilungen . . . . .	31
2.7.1	Gleichverteilung . . . . .	31
2.7.2	Gauß-Verteilung . . . . .	32
2.7.3	Ausfallhäufigkeit während des Betriebs . . . . .	34
2.8	Fehlerfortpflanzung . . . . .	35
2.8.1	Allgemeine Gleichungen für die Fortpflanzung von Fehler- grenzen . . . . .	35
2.8.2	Fortpflanzung der Fehlergrenzen bei bestimmten Rechnungen	37
2.8.3	Praxisanleitung für die Berechnung von Fehlern . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Übertragungsfunktion und dynamische Messunsicherheiten</b>	<b>39</b>
3.1	Übertragungsfunktion . . . . .	39
3.1.1	Beispiel RC-Glied . . . . .	40
3.2	Dynamische Messfehler . . . . .	44
3.2.1	Definition der Einschwingzeit . . . . .	45
3.2.2	Verringerung der Einschwingzeit . . . . .	45
3.2.3	Inverse Filterung zur Korrektur dynamischer Fehler . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Multimeter</b>	<b>51</b>
4.1	Einleitung . . . . .	51
4.2	Analoge Messwerke . . . . .	51
4.2.1	Drehspulmesswerk . . . . .	51
4.2.2	Dreheisenmesswerk . . . . .	55
4.2.3	Elektrodynamisches Messwerk . . . . .	56
4.2.4	Messfehler bei analogen Messwerken . . . . .	59
4.2.5	Symbole analoger Messwerke . . . . .	59
4.3	Digitale Messwerke . . . . .	59
4.3.1	Funktionsweise . . . . .	60

4.3.2	Abtast- und Halteschaltung (Sample & Hold) . . . . .	61
4.3.3	A/D-Wandler . . . . .	63
4.3.3.1	Funktionsweise . . . . .	63
4.3.3.2	Parallel A/D-Wandler . . . . .	64
4.3.3.3	Sukzessive Approximation . . . . .	66
4.3.3.4	Single-Slope Wandler . . . . .	67
4.3.3.5	Dual-Slope Wandler . . . . .	68
4.3.3.6	Delta-Sigma Wandler . . . . .	70
4.3.4	A/D-Wandlerfehler . . . . .	71
4.3.5	Realisierung eines Digitalmultimeters (DMM) . . . . .	72
4.4	Spannungs- und Strommessung . . . . .	74
4.4.1	Spannungsmessung . . . . .	74
4.4.2	Strommessung . . . . .	75
4.4.2.1	Direkte Strommessung . . . . .	78
4.4.2.2	Strommessung über Shunt . . . . .	78
4.4.2.3	Strommessung über Magnetfeld . . . . .	79
4.4.3	Vielfachinstrument . . . . .	81
4.5	Widerstandsmessung . . . . .	84
4.5.1	Spannungsrichtige Messung . . . . .	84
4.5.2	Stromrichtige Messung . . . . .	85
4.5.3	Messung mit Stromquelle . . . . .	86
4.6	Zweileitermessung - Vierleitermessung . . . . .	87
4.6.1	Zweileitermessung . . . . .	87
4.6.2	Vierleitermessung . . . . .	88
4.7	Kapazitätsmessung . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Oszilloskope</b> . . . . .	<b>91</b>
5.1	Zweck und Funktionsprinzip . . . . .	91
5.2	Analogoszilloskop . . . . .	93
5.3	Digitaloszilloskop . . . . .	95
5.4	Triggerung . . . . .	98
5.5	Messverfahren . . . . .	99
5.5.1	yt-Betrieb . . . . .	99
5.5.2	Strommessung . . . . .	101
5.5.3	Phasenmessung im Zweikanalbetrieb . . . . .	103
5.5.4	AC - DC Betrieb . . . . .	104
5.5.5	Bestimmung der unteren Grenzfrequenz im AC-Betrieb . . . . .	105
5.5.6	Messung von Mischspannungen . . . . .	105
5.5.7	xy-Betrieb . . . . .	105
5.5.8	Kennlinienaufnahme . . . . .	106
5.5.9	Lissajous-Figuren . . . . .	108
5.6	Tastkopf . . . . .	111

5.7	Messfehler . . . . .	114
5.8	Spezielle Oszilloskope . . . . .	118
5.8.1	Sampling-Oszilloskope . . . . .	118
5.8.2	Digitale Phosphor Oszilloskope . . . . .	118
5.8.3	Logikanalysatoren . . . . .	120
<b>6</b>	<b>Zeit, Frequenz, Spektrum</b>	<b>122</b>
6.1	Einleitung . . . . .	122
6.2	Zeit . . . . .	122
6.2.1	Messprinzip . . . . .	122
6.2.2	Zeitbasen . . . . .	122
6.2.2.1	Inverterkette . . . . .	123
6.2.2.2	Astabile Kippstufe . . . . .	124
6.2.2.3	LC-Oszillator . . . . .	126
6.2.2.4	Quarzoszillator . . . . .	126
6.2.2.5	Atomuhr . . . . .	127
6.2.2.6	Genauigkeiten . . . . .	128
6.3	Frequenz . . . . .	129
6.3.1	Frequenzmessung . . . . .	129
6.3.2	Periodendauermessung . . . . .	130
6.4	Elektrische Spektralanalyse . . . . .	131
6.4.1	Messprinzip . . . . .	131
6.4.2	Hersteller . . . . .	132
6.5	Optische Spektralanalyse . . . . .	132
6.5.1	Elektromagnetisches Spektrum . . . . .	132
6.5.2	Optischer Spektrumanalysator (OSA) . . . . .	134
6.5.3	Hersteller . . . . .	135
<b>7</b>	<b>Messverstärker</b>	<b>136</b>
7.1	Einleitung . . . . .	136
7.2	Operationsverstärker . . . . .	137
7.3	Verstärkerschaltungen . . . . .	140
7.3.1	Invertierender Verstärker . . . . .	140
7.3.2	Nichtinvertierender Verstärker . . . . .	142
7.3.3	Instrumentenverstärker . . . . .	143
7.4	Rechenschaltungen . . . . .	143
7.4.1	Addierer . . . . .	144
7.4.2	Subtrahierer . . . . .	145
7.4.3	Differenzierer . . . . .	147
7.4.4	Integrator . . . . .	148
7.4.5	Logarithmierer . . . . .	149

7.5	Filterschaltungen . . . . .	150
7.5.1	Tiefpass . . . . .	150
7.5.2	Hochpass . . . . .	151
7.5.3	Bandpass . . . . .	152
7.6	Komparatorschaltungen . . . . .	153
7.6.1	Komparator . . . . .	153
7.6.2	Schmitt-Trigger . . . . .	154
7.7	D/A-Wandler . . . . .	155
7.7.1	Funktionsweise . . . . .	155
7.7.2	Parallelwandler . . . . .	156
7.7.2.1	Gewichtete Widerstände . . . . .	156
7.7.2.2	R-2R Netzwerk . . . . .	157
7.7.3	Degitch-Schaltung . . . . .	158
7.7.4	Serielle Wandler . . . . .	158
<b>8</b>	<b>Messbrücken und reale Bauelemente</b>	<b>160</b>
8.1	Reale Bauelemente . . . . .	160
8.1.1	Realer ohmscher Widerstand . . . . .	160
8.1.2	Der reale Kondensator . . . . .	161
8.1.3	Die reale Spule . . . . .	162
8.2	Warum Messbrücken? . . . . .	167
8.3	Gleichspannungsmessbrücken . . . . .	168
8.3.1	Abgleichmessbrücken . . . . .	168
8.3.1.1	Wheatstone-Messbrücke . . . . .	168
8.3.1.2	Thomson-Messbrücke . . . . .	169
8.3.2	Ausschlagmessbrücken . . . . .	171
8.4	Wechselspannungsmessbrücken . . . . .	174
8.4.1	Abgleichmessbrücken . . . . .	174
8.4.1.1	Abgleichbedingung . . . . .	174
8.4.1.2	Wien-Brücke . . . . .	176
8.4.1.3	Maxwell-Wien-Brücke . . . . .	178
8.4.2	Ausschlagmessbrücken . . . . .	180

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Messsystem . . . . .	2
2.1	Zusammenhang zwischen Aufwand und Genauigkeit einer Messung .	17
2.2	Datenblattauszug: JDSU OSA-200 . . . . .	19
2.3	Korrektur systematischer Fehler . . . . .	21
2.4	Fehlerklasse eines Drehspulinstruments . . . . .	22
2.5	Datenblattauszug: Fluke 175 . . . . .	24
2.6	Lineare Regression . . . . .	28
2.7	Gleichverteilung . . . . .	32
2.8	Gauß-Verteilung . . . . .	33
2.9	Empirische Zeitverteilung der Ausfallhäufigkeit . . . . .	35
3.1	Einfaches Ersatzschaltbild eines Messsystems . . . . .	41
3.2	Frequenzgang des RC-Ersatzschaltbildes nach Betrag (durchgezogen) und Phase (gestrichelt) . . . . .	42
3.3	Sprungantwort des RC-Glieds . . . . .	43
3.4	Impulsantwort des RC-Glieds . . . . .	43
3.5	Messsystem . . . . .	45
3.6	Einschwingzeit eines Systems . . . . .	46
3.7	Messsystem mit Block zur Reduzierung der Einschwingzeit . . . . .	47
3.8	Frequenzgang mit und ohne Frequenzkompensation . . . . .	48
3.9	Zeitfunktion mit und ohne Frequenzkompensation . . . . .	49
4.1	Drehspulmesswerk . . . . .	52
4.2	Schema eines Drehspulmesswerks . . . . .	53
4.3	Dreheisenmesswerk . . . . .	55
4.4	Elektrodynamisches Messwerk . . . . .	57
4.5	Blockschaltbild eines digitalen Messgerätes . . . . .	61
4.6	Schema der Abtast- und Halteschaltung . . . . .	62
4.7	Übertragungsfunktion eines A/D-Wandlers . . . . .	63
4.8	Schaltbild eines Parallel A/D-Wandlers . . . . .	65
4.9	Blockschaltbild eines A/D-Wandlers mit Sukzessiver Approximation . . . . .	66
4.10	Blockschaltbild eines Single-Slope A/D-Wandlers . . . . .	67
4.11	Blockschaltbild eines Dual-Slope A/D-Wandlers . . . . .	69
4.12	Blockschaltbild eines Delta-Sigma A/D-Wandlers . . . . .	71
4.13	Datenblattauszug eines ICs für ein Digitalmultimeter . . . . .	73

---

4.14	Applikationsschaltung für DMM-IC . . . . .	74
4.15	Spannungsmessung . . . . .	75
4.16	Voltmeter mit Messbereichserweiterung . . . . .	76
4.17	Strommessung . . . . .	76
4.18	Amperemeter mit Messbereichserweiterung . . . . .	77
4.19	Direkte Strommessung . . . . .	78
4.20	Strommessung über Shuntwiderstand . . . . .	79
4.21	Strommessung über Magnetfeld . . . . .	79
4.22	Beschaltung eines Messwerks zu einem Vielfachinstrument . . . . .	82
4.23	Spannungsrichtige Widerstandsmessung . . . . .	84
4.24	Stromrichtige Widerstandsmessung . . . . .	86
4.25	Widerstandsmessung mit Stromquelle . . . . .	87
4.26	Zweileitermessung . . . . .	88
4.27	Vierleitermessung . . . . .	88
4.28	Kapazitätsmessung mit Stromquelle . . . . .	89
5.1	Blockschaltbild eines Analogoszilloskops . . . . .	94
5.2	Analogoszilloskop . . . . .	95
5.3	Blockschaltbild eines Digitaloszilloskops . . . . .	96
5.4	Triggerung eines Oszilloskops . . . . .	98
5.5	Aufbau eines yt-Oszillogramms . . . . .	100
5.6	Strommessung an einem Shuntwiderstand . . . . .	101
5.7	Strommessung über das Magnetfeld (Stromzange) . . . . .	102
5.8	Bild einer Stromzange . . . . .	102
5.9	Phasenmessung zwischen zwei Sinusspannungen im Zweikanalbetrieb . . . . .	103
5.10	Grenzfrequenz im DC- und AC-Betrieb . . . . .	104
5.11	Messung einer Mischspannung . . . . .	106
5.12	Aufbau eines xy-Oszillogramms . . . . .	107
5.13	Schaltung zur Kennlinienaufnahme . . . . .	107
5.14	Lissajous-Figuren zweier Sinusschwingungen gleicher Frequenz und unterschiedlicher Phase . . . . .	109
5.15	Lissajous-Figuren zweier Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz . . . . .	110
5.16	Schaltplan eines Tastkopfes . . . . .	111
5.17	Einstellung des Tastkopfes zur Frequenzgangkompensation . . . . .	113
5.18	Tastkopf . . . . .	114
5.19	Ausschnitt der Spezifikation eines Oszilloskops . . . . .	117
5.20	Messverfahren eines Sampling-Oszilloskops . . . . .	119
5.21	Blockschaltbild eines Logikanalysators . . . . .	120
6.1	Prinzip der Zeit- und Frequenzmessung . . . . .	123
6.2	Inverterkette . . . . .	123
6.3	Astabile Kippstufe . . . . .	124



---

6.4	Astabile Kippstufe mit LTSpice simuliert . . . . .	125
6.5	LC-Oszillator mit Operationsverstärker . . . . .	126
6.6	Quarzoszillator mit Feldeffekt-Transistoren . . . . .	127
6.7	Ersatzschaltbild des Quarzes . . . . .	127
6.8	Übertragungsschema des DCF77 Funksignals . . . . .	128
6.9	Blockschaltbild der Frequenzmessung . . . . .	129
6.10	Blockschaltbild der Periodendauermessung . . . . .	130
6.11	Prinzip des elektrischen Spektrumanalysators . . . . .	131
6.12	Elektromagnetisches Spektrum . . . . .	133
6.13	Prinzip eines optischen Spektrumanalysators mit Beugungsgitter . . . . .	134
7.1	Symbole für Verstärker . . . . .	137
7.2	Verstärker als Vierpol . . . . .	137
7.3	Schaltsymbol und Ersatzschaltbild eines idealen Operationsverstärkers	138
7.4	Invertierender Verstärker . . . . .	141
7.5	Nichtinvertierender Verstärker . . . . .	142
7.6	Instrumentenverstärker . . . . .	144
7.7	Addierer . . . . .	145
7.8	Subtrahierer . . . . .	146
7.9	Differenzierer . . . . .	147
7.10	Integrator . . . . .	148
7.11	Logarithmierer . . . . .	149
7.12	Tiefpass 1. Ordnung . . . . .	150
7.13	Hochpass 1. Ordnung . . . . .	151
7.14	Bandpass . . . . .	152
7.15	Komparator . . . . .	153
7.16	Schmitt-Trigger . . . . .	154
7.17	Schema eines D/A-Wandlers . . . . .	155
7.18	D/A-Wandler mit gewichteten Widerständen . . . . .	156
7.19	D/A-Wandler mit R-2R Netzwerk . . . . .	157
7.20	Degitch Schaltung für D/A-Wandler . . . . .	158
7.21	Serieller D/A-Wandler . . . . .	159
8.1	Realer Widerstand: Ersatzschaltbild . . . . .	161
8.2	Realer Kondensator: Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm in der komplexen Leitwertebene . . . . .	161
8.3	Reale Spule: Ersatzschaltbilder verschiedener Modellierungstiefe . . . . .	163
8.4	Reale Spule: Zeigerdiagramm in der komplexen Ebene . . . . .	164
8.5	Hysteresekurve . . . . .	166
8.6	Messanordnung zur Bestimmung des Verlustwinkels . . . . .	167
8.7	Wheatstone-Messbrücke . . . . .	169
8.8	Thomson-Messbrücke . . . . .	170
8.9	Ausschlag-Messbrücke mit einem veränderlichen Widerstand . . . . .	172

8.10 Ausschlag-Messbrücke mit zwei veränderlichen Widerständen . . . .	173
8.11 Ausschlag-Messbrücke mit vier veränderlichen Widerständen . . . .	174
8.12 Wechselspannungsbrücke . . . . .	175
8.13 Wien-Brücke, Variante 1 . . . . .	176
8.14 Wien-Brücke, Variante 2 . . . . .	178
8.15 Maxwell-Wien-Brücke . . . . .	179

# Tabellenverzeichnis

4.1	Symbole analoger Messwerke . . . . .	60
5.1	Vergleich Multimeter - Oszilloskop . . . . .	91
6.1	Relative Fehler unterschiedliche Zeitbasen . . . . .	129

# Literaturverzeichnis

- [1] Hoffmann, Jörg: Taschenbuch der Messtechnik  
Fachbuchverlag Leipzig  
Dieses Buch gibt einen Überblick über einen großen Teil der Messtechnik. Die einzelnen Erklärungen sind meist sehr kurz gehalten, so dass es sich nicht als Lehrbuch eignet, zum Nachschlagen in der Praxis ist es jedoch gut geeignet.
- [2] Lerch: Elektrische Messtechnik  
Springer-Verlag  
Ein sehr ausführliches Buch über die Grundlagen der Messtechnik. Es ist auch ein Übungsbuch vom selben Autor verfügbar. Beide Bücher sind in der OTH-Bibliothek als e-Books abrufbar!
- [3] Schrüfer: Elektrische Messtechnik  
Hanser-Verlag  
Ein sehr gut aufgebautes Buch mit vielen praktischen Anwendungen.

Zudem sind im Internet eine große Menge Informationen vorhanden. Jedoch ist Richtigkeit der Informationen oft nicht gewährleistet. Am zuverlässigsten sind Firmeninformationen von Messtechnik-Herstellern.

In der OTH-Bibliothek sind ebenfalls einige unterschiedliche Bücher vorhanden, unter denen jeder Interessent ein passendes Buch finden sollte.

Im allgemeinen sollte jedoch dieses Script und andere zur Verfügung gestellte Literatur für diese Vorlesung ausreichen.



# 1 Einleitung

## 1.1 Was bedeutet Messen?

*Alles messen was messbar ist, alles messbar machen, was noch nicht messbar ist. (Galileo Galilei)*

In unserer Umwelt sind zahlreiche Größen vorhanden. Diese werden beim Messen quantifiziert. Somit werden sie

- **vergleichbar**
- **reproduzierbar**
- **speicherbar**
- **berechenbar**

Um eine Messung durchzuführen, müssen zwei Fundamentalvoraussetzungen gegeben sein:

- Die zu messende Größe muss qualitativ eindeutig definiert und quantitativ bestimmbar sein.
- Das Messnormal muss durch eine Konvention festgelegt sein.

## 1.2 Gründe für Messungen

- Ermöglichung der Wahrnehmung, z.B. bei elektromagnetischer Strahlung, Radioaktivität, Ultraschall
- Objektivierung der Wahrnehmung
- Herstellung der Vergleichbarkeit für räumlich oder zeitlich getrennte Abläufe
- Weiterverarbeitung der Messgrößen
- Speicherung der Messgrößen

## 1.3 Messsystem

Die Struktur eines Messsystems ist in Abbildung 1.1 dargestellt.

Eine Umweltgröße soll gemessen werden. Dazu wird diese Umweltgröße durch einen Sensor in ein Signal umgewandelt, das man weiter verarbeiten kann. Dieses Signal wird ausgewertet, heute meist durch einen Computer. Wird an diesen Computer ein Aktor angeschlossen, so kann man in die Umwelt eingreifen und so die Umweltgröße verändern. Damit ergibt sich die Struktur eines Regelkreises.

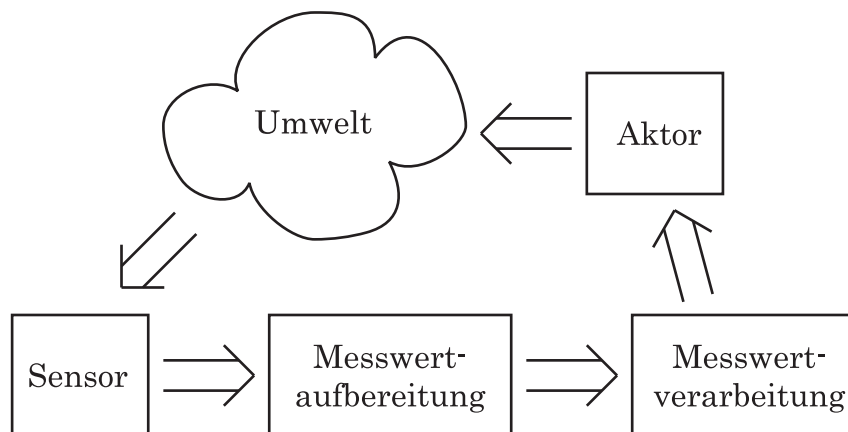


Abbildung 1.1: Messsystem

## 1.4 Allgemeine Begriffe

In der Messtechnik gibt es eine Vielzahl von Begriffen. Nachfolgend seien einige definiert:

- **Anzeige:** Auf der Anzeige kann man das Messergebnis ablesen. Bei analogen Messgeräten zeigt ein Zeiger den Messwert an, bei digitalen Messgeräten eine Zahl.
- **Anzeigebereich:** Der Anzeigebereich ist der Bereich der Messwerte, der abgelesen werden kann.
- **Auflösung:** Die Auflösung ist die gerade noch wahrnehmbare minimale Änderung des Messwertes auf der Anzeige.
- **Absoluter Fehler:** Der absolute Fehler ist die absolute Abweichung des Messwertes vom wahren Wert.

- **Empfindlichkeit:** Die Empfindlichkeit beschreibt die Änderung des Anzeigewerts bezogen auf die Änderung der Messgröße. Wenn der Wert der Anzeige eines Messgeräts über der Messgröße aufgetragen wird, beschreibt die Empfindlichkeit folglich die Steigung dieser Kurve. Wenn der Zusammenhang zwischen Anzeige und Messgröße nicht linear ist, ist die Empfindlichkeit offensichtlich nicht konstant und muss für jeden Arbeitspunkt als Ableitung der Anzeige nach der Messgröße bestimmt werden. Die Einheit der Empfindlichkeit ergibt sich aus den Einheiten von Anzeige- und Messgröße, z. B. V/mm.
- **Messung:** Die Messung ist der Vorgang, mit dem die Daten der Umwelt erfasst, verarbeitet und angezeigt werden.
- **Messbereich:** Der Messbereich ist der Teil des Anzeigebereichs, für den der Fehler des Messwertes innerhalb der garantierten Grenzen ist.
- **Messergebnis:** Das Messergebnis besteht aus einem oder mehreren Messwerten. Mehrere Messwerte können durch mathematische Operationen verknüpft sein.
- **Messgerät:** Das Messgerät ist die technische Einrichtung, um die Messung durchzuführen.
- **Messobjekt:** Das Messobjekt ist der Teil der Umwelt, von dem eine bestimmte Eigenschaft gemessen wird.
- **Messverfahren:** Das Messverfahren beschreibt das Verfahren, um eine bestimmte Messung durchzuführen.
- **Messwert:** Der Messwert ist der Wert, der bei einer Messung auftritt. Er wird normalerweise auf der Anzeige abgelesen. Der Messwert besteht aus einem Zahlenwert multipliziert mit einer Einheit.

Es gibt folgende Klassen von Messverfahren:

- **direkt:** Bei direkten Messverfahren wird der gesuchte Messwert durch direkten Vergleich mit einem Normal gefunden, z.B. direkte Gewichtsmessung mit einer Balkenwaage.
- **indirekt:** Bei der indirekten Messung wird der gesuchte Messwert zuerst in einen Wert mit einer anderen physikalischen Größe überführt. Diese wird dann gemessen, z.B. Druck  $\Rightarrow$  Länge  $\Rightarrow$  Längenmessung.

Es gibt unterschiedliche Arten von Abtastverfahren für Messgrößen:

- **Amplitudenkontinuierlich:** Der Messwert tritt mit beliebigen Amplituden auf. Dies ist eine Kennzahl von analogen Messverfahren.



- **Amplitudendiskret:** Der Messwert tritt nur mit bestimmten (quantisierten) Amplituden auf. Es gibt keine Zwischenwerte. Ändert sich der Messwert, so springt er zum nächsten Amplitudenwert.
- **Zeitkontinuierlich:** Der Messwert ändert sich zu jeder beliebiger Zeit. Dies ist bei analogen Messverfahren meist der Fall.
- **Zeitdiskret:** Der Messwert ändert sich nur zu bestimmten Zeiten. Dazwischen findet keine Änderung statt. Dies ist oft bei digitalen Messverfahren der Fall.

## 1.5 Einheiten

Eine Messgröße besteht immer aus dem Produkt einer Zahl mit einer Einheit!

$$\text{Messgröße} = \text{Zahl} \cdot \text{Einheit} \quad (1.1)$$

Wird eine Messgröße als Zahl ohne Einheit angegeben, dann ist sie sinnlos! Eine Interpretation ist dann nicht möglich. !

Eine erste Abschätzung einer Rechnung können Sie ganz einfach machen, indem sie testen, ob die Einheiten links und rechts vom Gleichheitszeichen gleich sind!

Es gibt eine große Menge an Einheiten. Alle kann man auf die SI-Basiseinheiten zurückführen. Die SI-Basiseinheiten sind:

Größe	Basiseinheit	Definition
Masse	kg	Relation zwischen der Planckschen Konstanten $h$ und der Masse eines Probekörpers.
Zeit	s	$1s = 9.192.631.770 \cdot \text{Resonanzschwingung}^{133}Cs$
Länge	m	Ein Meter entspricht der Wegstrecke, die das Licht in $\frac{1}{299.794.458}s$ durchläuft.
Temperatur	K	1 Kelvin ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von Wasser.
Strom	A	Ein Ampere entspricht genau einem Strom von $\frac{1}{1,602176634 \cdot 10^{-19}}$ Elementarladungen pro Sekunde, bei einem Fluss von Elektronen sind dies ca. $6,2 \cdot 10^{18}$ (also 6,2 Trillionen) Elektronen pro Sekunde.
Stoffmenge	mol	Anzahl der Atome, die in 12g von $^{12}C$ vorkommt.
Lichtstärke	cd	Strahlstärke in einer bestimmten Richtung einer monochromatischen Strahlungsquelle, welche eine Frequenz von $f_0 = 540 \cdot 10^{12}Hz$ aussendet und deren Leistung $\frac{1}{683} \frac{Watt}{Steradian}$ beträgt.

Daraus kann man alle anderen Einheiten ableiten, z.B.

Abgeleitete Größe	Name	SI-Einheit
Mechanische Größen		
Fläche	Quadratmeter	$1m^2$
Volumen	Kubikmeter	$1m^3$
Dichte	Kilogramm pro Kubikmeter	$1\frac{kg}{m^3}$
Geschwindigkeit	Meter pro Sekunde	$1\frac{m}{s}$
Beschleunigung	Meter pro Sekundenquadrat	$1\frac{m}{s^2}$
Kraft	Newton	$1N = 1\frac{m \cdot kg}{s^2}$
Druck	Pascal	$1Pa = 1\frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$
Drehmoment	Nm	$1Nm = 1\frac{m^2 \cdot kg}{s^2}$
Leistung und Energie		
Leistung	Watt	$1W = 1\frac{J}{s} = 1\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$
Energie	Joule	$1J = 1W \cdot s = 1N \cdot m = 1\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$
Elektromagnetische Größen		
El. Spannung	Volt	$1V = 1\frac{W}{A} = 1\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$
El. Widerstand	Ohm	$1\Omega = 1\frac{V}{A} = 1\frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^3}$
El. Leitwert	Siemens	$1S = 1\Omega^{-1}$
El. Ladung	Coulomb	$1C = 1A \cdot s$
Kapazität	Farad	$1F = 1\frac{C}{V} = 1\frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^2}$
Mag. Fluss	Weber	$1Wb = 1V \cdot s = 1\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^2}$
Mag. Flussdichte	Tesla	$1T = 1\frac{Wb}{m^2} = 1\frac{kg}{A \cdot s^2}$
Induktivität	Henry	$1H = 1\frac{Wb}{A} = 1\frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^2}$

Es gibt noch eine ganze Reihe von Einheiten, die nicht mit dem SI-System konform sind, jedoch teilweise verwendet werden. Bitte verwenden Sie diese Einheiten **nicht**. Sie sind hier nur aufgeführt, falls Sie irgendwo auf eine solche stoßen und diese umrechnen müssen.

Einheit	Umrechnung
Seemeile	$1nmile = 1853,2m$
Inch	$1in = 25,4mm$
Mil	$1mil = 25,4\mu m$
Pferdestärke	$1PS = 0,735kW$

## 1.6 Präfixe

Zehnerpotenz	Präfix	Kurzzeichen
$10^{18}$	Exa	E
$10^{15}$	Peta	P
$10^{12}$	Tera	T
$10^9$	Giga	G
$10^6$	Mega	M
$10^3$	Kilo	k
$10^2$	Hekto	h
$10^1$	Deka	da
$10^{-1}$	Dezi	d
$10^{-2}$	Zenti	c
$10^{-3}$	Milli	m
$10^{-6}$	Mikro	$\mu$
$10^{-9}$	Nano	n
$10^{-12}$	Piko	p
$10^{-15}$	Femto	f
$10^{-18}$	Atto	a
$10^{-10}m$	Angström	Å

Das Angström wird gerne von Physikern bei der Bezeichnung von Längen in atomaren Dimensionen benutzt. Diese Einheit gehört zwar nicht zum SI-System, wird aber aufgrund ihrer handlichen Zahlenwerte oft benutzt.

Das Präfix „m“ hat eine ganz andere Bedeutung als das Präfix „M“. Wenn Sie hier Groß- und Kleinschreibung verwechseln, dann sind 9 Zehnerpotenzen Unterschied!!!

In manchen Textverarbeitungen kann man das „ $\mu$ “ nicht darstellen und man benutzt das „u“.

## 1.7 Logarithmische Maße

Es gibt Anwendungen, bei denen eine logarithmische Angabe von Messwerten sinnvoller ist als eine lineare Angabe von Messwerten. Dies ist z.B. der Fall, wenn sich ein Messwert in einem Bereich von mehreren Zehnerpotenzen bewegt.

Die Bezeichnung für die logarithmische Darstellung ist das **Bel**. In der Praxis wird meist das **Dezibel** angegeben. Bei sehr genauen Messungen wird manchmal im

Millibel gemessen.

$$1B = 10dB \quad (1.2)$$

$$1dB = 100mB \quad (1.3)$$

### 1.7.1 Relative Maße

Will man das Verhältnis zwischen zwei Leistungen  $P_1$  und  $P_2$  logarithmisch darstellen, so rechnet man

$$V_{dB} = 10dB \cdot \log_{10} \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \quad (1.4)$$

Hierbei ist  $V_{dB}$  das Verhältnis der beiden Leistungen logarithmisch ausgedrückt.

Ist das Verhältnis zwischen zwei Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  (oder zwei Strömen) gefordert, so wird das logarithmische Verhältnis

$$V_{dB} = 20dB \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2}{U_1} \right) \quad (1.5)$$

### 1.7.2 Absolute Maße

Auch absolute Leistungen werden logarithmisch angegeben. Dazu muss eine Bezugsleistung festgelegt werden, diese ist oft  $1mW$ .

$$P_{dBm} = 10dBm \cdot \log_{10} \left( \frac{P}{1mW} \right) \quad (1.6)$$

Das  $dBm$  als (Pseudo-)Einheit der Leistung zeigt an, dass die Leistung logarithmisch in Dezibel mit der Bezugsleistung  $1mW$  angegeben wird.

## 1.8 Rechengrößen

Zur Charakterisierung von Wechselsignalen können zahlreiche Größen berechnet werden, von denen hier einige vorgestellt werden. In Klammern sind jeweils die englischen Bezeichnungen angegeben.

### 1.8.1 Periodendauer (period) & Frequenz (frequency)

Die Periodendauer  $T$  eines periodischen Signals  $f(t)$  ist die kürzeste Zeitspanne, ab der sich das Signal wiederholt:

$$f(t) = f(t + n \cdot T), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.7)$$

Die Frequenz  $f$  ist der Kehrwert der Periodendauer:

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.8)$$

Für trigonometrische Funktionen ist es zweckmäßig, die Frequenz bezogen auf eine Periodendauer im Bogenmaß als Kreisfrequenz  $\omega$  zu definieren:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.9)$$

### 1.8.2 Scheitelwert (peak)

Der Scheitelwert beschreibt den betragsmäßig höchsten Wert eines Signals:

$$\hat{u} = \begin{cases} |u_{\max}| & |u_{\max}| > |u_{\min}| \\ |u_{\min}| & |u_{\max}| < |u_{\min}| \end{cases} \quad (1.10)$$

### 1.8.3 Schwingungsbreite (peak to peak)

Die Schwingungsbreite bezeichnet den Gesamtbereich, in dem sich die Werte eines Signal bewegen:

$$u_{pp} = u_{\max} - u_{\min} \quad (1.11)$$

### 1.8.4 Gleichanteil (mean)

Der Gleichanteil  $\bar{u}$  wird berechnet als der arithmetische Mittelwert des Signals:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (1.12)$$

Der Gleichanteil beschreibt die mittlere Ladungsträgerbewegung und damit die chemische Wirkung des elektrischen Stromes. Bei einem reinen Wechselsignal wird der Gleichanteil  $\bar{u} = 0$ .

### 1.8.5 Gleichrichtwert (rectified value)

Bei einem idealen Gleichrichter wird der negative Anteil der Wechselgröße invertiert. Der arithmetische Mittelwert des gleichgerichteten Signals wird als Gleichrichtwert  $\overline{|u|}$  bezeichnet:

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt \quad (1.13)$$

Für eine rein positive Spannung ist der Gleichanteil gleich dem Gleichrichtwert  $\bar{u} = \overline{|u|}$ . Besitzt die Spannung  $u(t)$  negative Anteile, so unterscheiden sich die beiden Werte.

### 1.8.6 Effektivwert (root mean square)

Der Effektivwert  $U$  oder quadratischer Mittelwert drückt die thermische Wirkung aus und ist damit die technisch bedeutendste Angabe, insbesondere für reine Wechselgrößen.

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad (1.14)$$

Bei additiver Überlagerung  $u = u_1 + u_2 + \dots$  erhält man den Gesamteffektivwert durch:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + \dots} \quad (1.15)$$

### 1.8.7 Scheitelfaktor (peak factor)

Der Scheitelfaktor  $S$  ist das Verhältnis von Scheitelwert  $\hat{u}$  zum Effektivwert  $U$  einer reinen Wechselgröße (ohne Gleichanteil).

$$S = \frac{\hat{u}}{U} \quad (1.16)$$

### 1.8.8 Formfaktor (form factor)

Der Formfaktor  $F$  ist das Verhältnis von Effektivwert  $U$  zu Gleichrichtwert  $\overline{|u|}$  eines Signals.

$$F = \frac{U}{\overline{|u|}} \quad (1.17)$$

### 1.8.9 Welligkeit (ripple)

Der Faktor  $w$  wird als Welligkeit einer gleichgerichteten Spannung bzw. eines Stromes bezeichnet. Die Welligkeit ist das Verhältnis des Effektivwertes des Wechselanteils  $U_{\sim}$  zum arithmetischen Mittelwert  $\bar{u}$  bzw. Gleichanteil.

$$w = \frac{U_{\sim}}{\bar{u}} \quad (1.18)$$

Mit der Bedingung  $\overline{|u|} = \overline{u}$ , d.h. das zeitliche Signal beinhaltet keine Vorzeichenwechsel, kann man die Welligkeit direkt über den Formfaktor berechnen:

$$w = \sqrt{F^2 - 1} \quad (1.19)$$

### 1.8.10 Klirrfaktor, Total Harmonic Distortion

Der Klirrfaktor drückt aus, wie stark ein Wechselsignal von einem Sinussignal abweicht. Mittels Fourieranalyse kann man jedes periodische Wechselsignal als eine Summe aus Sinusschwingungen ausdrücken. Die einzelnen Frequenzen sind dabei Vielfache der Grundfrequenz.

Der Klirrfaktor ist definiert als das Verhältnis des Effektivwertes aller Oberschwingungen zum Effektivwert des Gesamtsignals.

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{\infty} U_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} U_i^2}} = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U} \quad (1.20)$$

Hierbei ist  $U_i$  der Effektivwert der  $i$ -ten Schwingung. Der Index  $i = 1$  bezeichnet die Grundschwingung.

Analog dazu beschreibt die Total Harmonic Distortion (THD) das Verhältnis der summierten Oberschwingungsleistung zur Grundschwingungsleistung:

$$\text{THD} = \frac{\sum_{i=2}^{\infty} U_i^2}{U_1^2} \quad (1.21)$$

Klirrfaktor und THD sind nicht identisch, gehen aber für kleine Werte ineinander über.

## 1.9 Systematisches Messen

Wie bei allen Arbeiten als Ingenieur sollten Sie auch bei Messungen systematisch vorgehen.

Bevor Sie eine Messung starten, sollten Sie folgende Überlegungen anstellen:

- Welche physikalische Größe soll gemessen werden?
- Welche Größenordnung des Messergebnisses kann erwartet werden?
- Welches Messverfahren ist für diese physikalische Größe und für diese Größenordnung des Messergebnisses geeignet?
- Welche Messgeräte sind für diese Messung geeignet?
- Sind störende Umwelteinflüsse vorhanden, welche die Messung in der Genauigkeit beeinträchtigen? Kann man diese Umwelteinflüsse eliminieren?
- Nimmt der Sensor wirklich den zu messenden Wert auf?
- Wie groß ist der erwartete Fehler der Messung?
- Sind die gemessenen Ergebnisse im erwarteten Wertebereich?
- Wurde bei der Messung ein Denkfehler gemacht?



## 2 Messunsicherheiten

### 2.1 Einleitung

Bisher wurden ausschließlich ideale Werte betrachtet. Bauteile hatten exakte Werte, Strom- und Spannungsmessungen waren ohne Messfehler.

In der realen Welt ist dies nicht der Fall. Durch Toleranzen in der Produktion haben Bauteilwerte Streuungen um den gewünschten Wert. Durch nicht perfekte Messwerke sind Messwerte fehlerbehaftet.

Dies soll im Folgenden etwas näher betrachtet werden.

Dazu sollen zunächst einige Größen definiert werden.

#### **Messwert**

Der Messwert  $M$  ist der Wert, den ein Messgerät anzeigt. Dieser kann fehlerbehaftet sein und von Messung zu Messung schwanken.

#### **Wahrer Wert**

Der wahre Wert  $W$  ist der exakte Wert, den eine Messung theoretisch hat. Dieser Wert ist **niemals** ermittelbar, da man kein perfektes Messgerät bauen kann, das diesen Wert exakt bestimmt.

Somit ist dieser Wert eine theoretische Größe.

#### **Richtiger Wert**

Der richtige Wert  $R$  ist eine praktische Annäherung an den wahren Wert. Man nimmt an, dass man ein Messgerät mit technisch maximalen Möglichkeiten hat und mit diesem Gerät eine Vielzahl von Messungen macht. Dann ist der resultierende Mittelwert der richtige Wert.

Da der wahre Wert unbekannt ist, nimmt man in der Praxis an:

$$R \approx W \quad (2.1)$$

Nur mit dieser Näherung sind praxistaugliche Betrachtungen möglich.

**Absoluter Fehler**

Der absolute Fehler gibt an, wie weit der Messwert vom wahren Wert entfernt ist.

$$F_{abs} = M - W \quad (2.2)$$

Der absolute Fehler  $F$ , der Messwert  $M$  und der wahre Wert  $W$  besitzen die gleichen Einheiten. !

**Relativer Fehler**

Der relative Fehler gibt an, wie groß die relative Abweichung des Messwertes vom wahren Wert ist.

$$F_{rel} = \frac{M - W}{W} \quad (2.3)$$

Der relative Fehler ist einheitenlos und wird oft in % angegeben. !

**2.2 Genauigkeiten****2.2.1 Zahl gültiger Stellen**

Keine Messung ist unendlich genau. Da jede Messung fehlerbehaftet ist, kann man eine Messung nicht mit beliebiger Genauigkeit angeben. Die Zahl der angegebenen Stellen ist ein Maß für die Auflösung der Messung (oder zumindest sollte es so sein). Die Auflösung ist mit der Absolutgenauigkeit korreliert.

Es sind die nachfolgenden vier Messergebnisse gegeben. Welches Ergebnis hat welche Genauigkeit?

$$\begin{aligned} M_1 &= 4 \\ M_2 &= 4,2 \\ M_3 &= 4,27 \\ M_4 &= 4,279 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Es ist intuitiv klar, dass  $M_1$  in (2.4) eine wesentliche geringere Genauigkeit besitzt als  $M_4$ . Nimmt man an, dass die letzte Stelle bei den Messungen noch gültig ist (also im Rahmen der Rundungsgenauigkeit richtig ist), so ergibt sich für die maximalen Fehler der obigen Messungen:

$$\begin{aligned} \Delta M_1 &= \pm 0,5 \\ \Delta M_2 &= \pm 0,05 \\ \Delta M_3 &= \pm 0,005 \\ \Delta M_4 &= \pm 0,0005 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Meist sind in der Praxis die maximalen Absolutfehler eines Messgerätes größer als die halbe angezeigte letzte Stelle. Mit der Anzeige zusätzlicher (ungenauer) Stellen will man vermeiden, dass ein technisch genaues Messgerät aufgrund von Rundungsfehlern an Genauigkeit verliert.

### **Berechnung der Zahl gültiger Stellen**

Die Zahl der gültigen Stellen eines Messgerätes kann allgemein mit folgender Gleichung berechnet werden:

$$Z = \log_{10}(\textit{Count}) \quad (2.6)$$

Hierbei ist *Count* die maximale Anzahl der Zahlen, die ein Gerät anzeigt und *Z* die Anzahl der gültigen Stellen.

Viele Digitalmultimeter besitzen einen Anzeigebereich  $0 \dots 1999$ . Daraus folgt für  $\textit{Count} = 2000$  und damit ist die Anzahl der gültigen Stellen

$$Z = \log_{10}(2000) = 3,3 \quad (2.7)$$

Die Hersteller der Digitalmultimeter runden den Wert aus (2.7) auf 3,5 auf und geben dies in den Gerätebeschreibungen als Zahl der gültigen Stellen an.

### **Nachfolgende Berechnungen**

Bei nachfolgenden Berechnungen ist es wichtig, dass die Zahl der gültigen Stellen beibehalten wird. Reduziert man die Zahl der gültigen Stellen im Endergebnis im Vergleich zur ursprünglichen Messung, so „verschenkt“ man Auflösung. Das Endergebnis ist ungenauer als es eigentlich wäre.

Erhöht man im Endergebnis die Zahl der Stellen im Vergleich zur Messung, suggeriert man dem Betrachter eine höhere Auflösung, welche die Messung nicht besitzt. Dadurch kann es zu Fehlinterpretationen über die Aussagekraft der Messung kommen.

### **Ablezen analoger Geräte**

Bei analogen Geräten ist eine Bestimmung der Zahl der gültigen Stellen oft nur mit Feingefühl und etwas Erfahrung möglich. Mit einem geübten Auge kann man auch noch bei Zeigerstellungen zwischen Teilstrichen interpolieren. So kann man die Zahl der gültigen Stellen und damit die Auflösung maximieren.

### **Beispiel:**

Gegeben ist ein Winkelaufnehmer mit 13 Spuren. Er ist als optisches Codelineal mit einer Strichzahl von  $n = 2^{13}$  realisiert.

1. Wie groß ist die Zahl der gültigen Dezimalstellen?
2. Wie viele Stellen hat die Angabe der gemessenen Winkel im Gradmaß?
3. Wie ändert sich die Stellenzahl, wenn der Winkelaufnehmer um den Faktor 100 interpoliert?

zu 1:

$$Z = \log_{10}(2^{13}) = \log_{10}(8192) = 3,9$$

zu 2:

$$\Delta\varphi = \frac{360^\circ}{8192} = 0,044^\circ$$

Man kann auf  $0,01^\circ$  anzeigen, d.h. zwei Stellen nach dem Komma auf der Anzeige darstellen.

zu 3:

Die Zahl der gültigen Stellen erhöht sich um 2, woraus folgt:

$$Z = 5,9$$

Man kann auf  $0,0001^\circ$  anzeigen, d.h. vier Stellen nach dem Komma auf der Anzeige darstellen.

### 2.2.2 Auflösung

Die Auflösung entspricht dem Wert, den man als Benutzer gerade noch als Änderung der Anzeige wahrnimmt.

#### Digitale Anzeige

Bei einer digitalen Anzeige entspricht die Änderung der Anzeige um  $\pm 1$  der Auflösung. Diese Auflösung wird von jedem Benutzer gleich wahrgenommen.

#### Analoge Anzeige

Bei einer analogen Anzeige entspricht die kleinste wahrnehmbare Änderung der Zeigerposition der Auflösung des Gerätes. Dies ist keine objektive Größe. Ein Benutzer betrachtet nur die Zeigerpositionen auf den Teilstrichen, während ein anderer Benutzer mit dem Auge die Position des Zeigers zwischen den Teilstrichen interpoliert. Betrachten beide Benutzer das gleiche Gerät, so ist doch die wahrgenommene Auflösung unterschiedlich.

## Auflösung - Genauigkeit

Manchmal wird die Auflösung mit der Absolutgenauigkeit verwechselt! Die Auflösung ist im Normalfall deutlich höher als die Absolutgenauigkeit, da bei der Auflösung nur die Ungenauigkeit der Anzeige betrachtet wird. Bei der Absolutgenauigkeit werden die Fehler und Toleranzen des gesamten Messgerätes betrachtet.

### 2.2.3 Absolutgenauigkeit - Absolutfehler

Der Absolutfehler gibt den Fehler des Messwertes bezogen auf den wahren Wert an. Dieser Fehler hat immer den größten Wert aller Fehlerangaben im Datenblatt, da alle Fehler des Messgerätes bei seiner Berechnung eine Rolle spielen. So treten in einem Messgerät z.B. folgende Fehler auf:

- Quantisierungsfehler (digitale Messgeräte)
- Parallaxenfehler bei der Ablesung (analoge Messgeräte)
- Streuungen in der Produktion des Messwerkes
- Alterung
- Änderung der Umweltbedingungen (Temperatur, Feuchte, Luftdruck, ...)
- usw.

#### Beispiel:

Ein Digitalmultimeter zeigt eine Spannung von  $U_{mess} = 1,032V$  an. Ein Referenzgerät mit sehr hoher Absolutgenauigkeit zeigt eine Spannung von  $U_{ref} = 1,012V$  an.

Auflösung des Messgerätes:  $1mV$

Absolutfehler des Messgerätes:  $\Delta U = 1,032V - 1,012V = 20mV$

## Aufwand - Genauigkeit

Allgemein gilt, dass der Aufwand für eine Erhöhung der Absolutgenauigkeit überproportional steigt (vergleiche Abbildung 2.1)!

Während man eine Schätzmessung noch mit dem „feuchten Finger“ machen kann, investiert die PTB Millionensummen, um neue Messanordnungen für nationale Standards zu bauen.

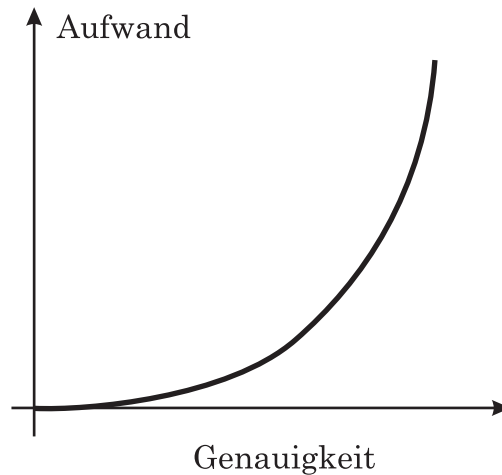


Abbildung 2.1: Zusammenhang zwischen Aufwand und Genauigkeit einer Messung

### 2.2.4 Relative Genauigkeit (Linearität)

Man betrachtet zwei beliebige Messpunkte innerhalb eines gewissen Messbereichs. Der maximal mögliche Fehler zwischen den beiden Messpunkten wird als Linearitätsfehler bezeichnet.

$$F_{lin} = \max((W_2 - W_1) - (M_2 - M_1)) \quad (2.8)$$

$$= \max\left(\underbrace{(W_2 - M_2)}_{F_{abs,2}} - \underbrace{(W_1 - M_1)}_{F_{abs,1}}\right) \quad (2.9)$$

$$= \max(F_{abs,2} - F_{abs,1}) \quad (2.10)$$

Hierbei ist  $F_{lin}$  der Linearitätsfehler. Die Indizes 1 und 2 bezeichnen zwei beliebige Messpunkte innerhalb des für die Linearität definierten Messbereichs.

Der Linearitätsfehler ist im allgemeinen kleiner als der Absolutfehler des Messgerätes in dem Messbereich.

#### Beispiel:

Man betrachtet ein Voltmeter in einem Messbereich zwischen 1V und 5V.

$$W_1 = 1V \quad M_1 = 1,25V$$

$$W_2 = 5V \quad M_2 = 5,15V$$

Hier wird angenommen, dass bei den obigen Messwerten der maximale Linearitätsfehler auftritt.

$$F_{Lin} = ((5V - 1V) - (5,15V - 1,25V)) = 0,1V$$

## 2.2.5 Auflösung - Linearität - Absolutgenauigkeit

Im allgemeinen gilt folgender Zusammenhang:

$$\boxed{\text{Auflösung} > \text{Linearität} > \text{Absolutgenauigkeit}}$$

oder

$$\boxed{\text{Auflösungsfehler} < \text{Linearitätsfehler} < \text{Absolutfehler}}$$

### Beispiel:

Wie groß ist die Auflösung, der Linearitätsfehler und die Absolutgenauigkeit in dem Datenblatt in Abbildung 2.2?

## 2.3 Fehlerarten

### 2.3.1 Welche Arten von Fehlern gibt es?

Es gibt zwei wesentliche Arten von Fehlern – statistische und systematische. Sie treten in Messungen meist gemeinsam auf.

$$F_{Ges} = F_{stat} + F_{sys} \quad (2.11)$$

Hierbei ist  $F_{Ges}$  der Gesamtfehler,  $F_{stat}$  der statistische Fehleranteil und  $F_{sys}$  der systematische Fehleranteil. Die statistischen Fehler können beschrieben, die systematischen Fehler korrigiert werden.

### 2.3.2 Statistische Fehler

Diese Fehler treten zufällig auf und haben folgende Eigenschaften:

- zufällig nach Betrag und Vorzeichen
- nicht reproduzierbar
- die Umwandlung in systematische Fehler ist aufwändig oder meist unmöglich

#### Behandlung statistischer Fehler

Die Fehler können nicht korrigiert werden. Sie können jedoch durch Mittelung mehrerer Messwerte verringert werden.

Der statistische Fehler nimmt mit der Wurzel der Anzahl der Messungen ab. Macht man z.B. 100 identische Messungen, so wird der statistische Fehler um den Faktor  $\sqrt{100} = 10$  im Vergleich zur Einzelmessung verringert.

<b>Full-band DWDM analyzers</b>	
<b>technical specifications</b> (typical at 25 °C)	
<b>Spectral measurement ranges</b>	
Wavelength range	1250 to 1650 nm
No. of optical channels	512
Wavelength calibration <sup>(1)</sup>	internal, on-line
Wavelength accuracy <sup>(2)</sup>	± 20 pm
Readout resolution	0.001 nm
Resolution bandwidth (FWHM) <sup>(3)</sup>	typ. 75 pm
Wavelength linearity (over 10 nm)	± 10 pm
<b>Power measurement ranges</b>	
Dynamic range <sup>(4)</sup>	-75 to +23 dBm
Noise floor RMS (with averaging) <sup>(3)</sup>	-75 dBm
Absolute accuracy <sup>(3, 5)</sup>	±0.4 dB
Linearity <sup>(6)</sup>	± 0.05 dB
Readout resolution	0.01 dB
Scanning time (1250 to 1650 nm) <sup>(7)</sup>	<1.5 s
Optical rejection ratio <sup>(3)</sup>	
at ±25 GHz (±0.2 nm)	typ 35 dBc
at ±50 GHz (±0.4 nm)	typ 45 dBc
PDL <sup>(3)</sup>	± 0.1 dB
Flatness <sup>(3)</sup>	± 0.2 dB
Level reproducibility <sup>(8)</sup>	± 0.05 dB
Wavelength range	1250 to 1650 nm
Data rates	up to 10.7 Gb/s
Spectral filter bandwidth	typ. 220 pm
Insertion loss	typ. <10 dB
Tracking mode	auto wavelength control

Abbildung 2.2: Datenblattauszug: JDSU OSA-200

### 2.3.3 Systematische Fehler

Diese Fehler haben folgende Eigenschaften:

- grundsätzlich berechenbar und korrigierbar
- reproduzierbar
- Korrektur ist oft sehr aufwändig, aber prinzipiell möglich

Systematische Fehler können kategorisiert werden in:

- Offset-Fehler: konstanter Absolutfehler (Verschiebung der Übertragungskennlinie)



- Verstärkungsfehler: konstanter relativer Fehler (Fehler in der Steigung der Übertragungskennlinie)
- Linearitätsfehler (nichtlineare Deformation der Übertragungskennlinie, s. o.)

Meist treten Kombinationen der einzelnen Fehlerarten auf. Die Korrektur kann durch additive oder multiplikative Korrekturfunktionen erfolgen.

### Korrektur systematischer Fehler

Zur Korrektur systematischer Fehler wird in folgender Reihenfolge vorgegangen:

1. Wiederholte Messungen an einem Referenzobjekt mit genau bekannter Messgröße
2. Mittelung der Messungen zur Verringerung der statistischen Fehlers
3. Berechnung des systematischen Fehlers an diesem Messpunkt  $F_{sys} = M - W$
4. Wiederholung des Verfahrens für mehrere Messpunkte im Messbereich

Man erhält eine Kurve des systematischen Fehlers über den Messbereich. Damit kann man eine Korrekturkurve für die Messung generieren. Das Messergebnis wird um diese Korrekturfunktion korrigiert und man erhält das Messergebnis ohne systematische Fehler.

Das Korrektursystem für systematische Fehler ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Das Messsystem liefert am Ausgang eine Übertragungsfunktion  $Y_U$ , die mit systematischen Fehlern behaftet ist. Das Korrektursystem korrigiert diese und das Gesamtsystem liefert eine Ausgangsfunktion ohne systematische Fehler  $Y$ .

### 2.3.4 Quantisierungsfehler

Quantisierungsfehler treten bei der Wandlung eines analogen Signals in einen digitalen Wert auf. Jedem analogen Wert muss ein digitaler Wert zugeordnet werden:

Analogwertebereich	⇒	Digitalwert
0,000 ... 0,499	⇒	0
0,500 ... 1,499	⇒	1
1,500 ... 2,499	⇒	2
...	⇒	...

Der Quantisierungsfehler ist kein wirklicher systematischer Fehler, da man systematische Fehler korrigieren kann und somit den richtigen Wert rekonstruieren kann. Dies ist beim Quantisierungsfehler nicht möglich.

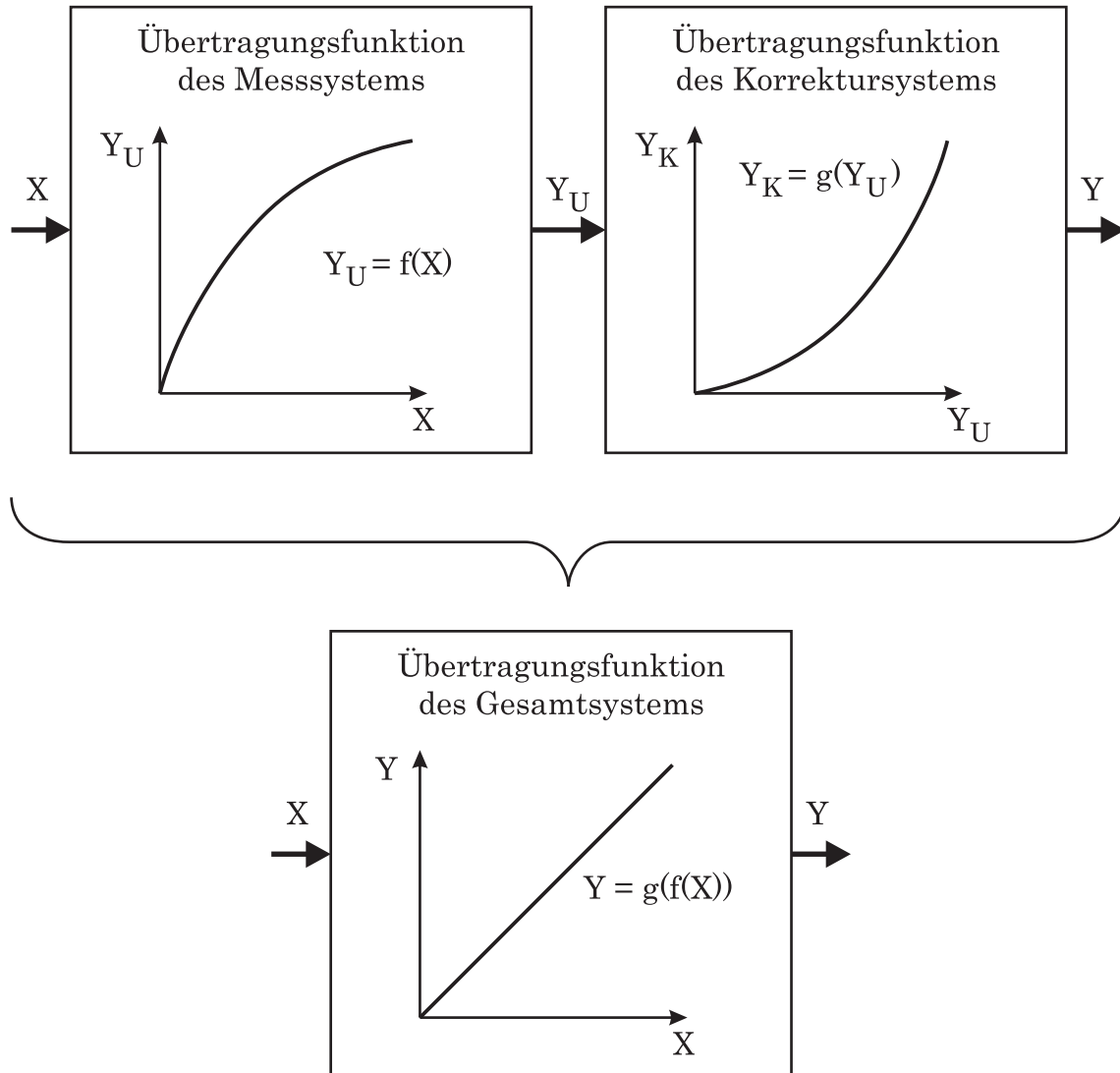


Abbildung 2.3: Korrektur systematischer Fehler

Der Quantisierungsfehler ist kein wirklicher statistischer Fehler, da bei einem statistischen Fehler bei jeder Messung ein anderer Ausgangswert auftritt, hier jedoch immer der gleiche Ausgangswert vorhanden ist.

Meist wird der Quantisierungsfehler trotzdem den statistischen Fehlern zugeordnet, da er nicht durch ein Korrektursystem zu beseitigen ist.

## 2.4 Fehlergrenzen bei Messgeräten

### 2.4.1 Fehlerklassen bei Analoggeräten

Als Fehlerklasse  $K_E$  wird der größtmögliche Fehlerbetrag  $G$  in Prozent des Messbereichsendwertes  $x_E$  angegeben. Der Messwert wird mit  $x_M$  bezeichnet.

$$K_E = 100 \cdot \frac{G}{x_E} \quad (2.12)$$

Damit ist der absolute Fehler

$$F_{abs} = \frac{K_E}{100} \cdot x_E \quad (2.13)$$

und der relative Fehler in %

$$F_{rel} = \frac{K_E}{100} \cdot \frac{x_E}{x_M} \cdot 100\% \quad (2.14)$$

Typische Fehlerklassen sind

Präzisionsmessgeräte:	0,1	0,2	0,5
Labormessgeräte:	0,5	1,0	
Betriebsmessgeräte:	1,0	2,0	2,5 4,0 5,0

Bei den meisten Analogmessgeräten ist die Fehlerklasse auf der Skala vermerkt, wie in Abbildung 2.4 zu sehen ist.

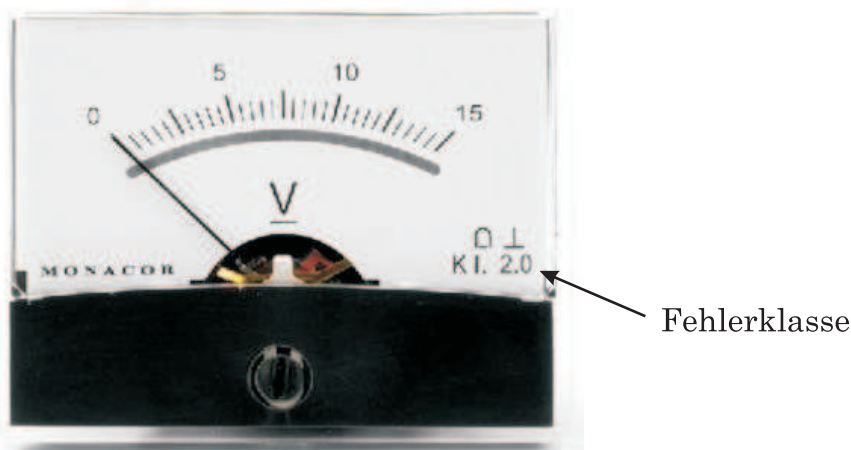


Abbildung 2.4: Fehlerklasse eines Drehspulinstruments

Am nachfolgenden Beispiel sieht man, dass es wichtig ist, den Messbereich so zu wählen, dass der Zeigerausschlag möglichst groß ist. Dadurch wird der relative Fehler der Messung gering gehalten. !

**Beispiel:**

Es ist ein Voltmeter mit der Fehlerklasse 1 gegeben. Der Endwert des Messbereichs ist 100V. In der nachfolgenden Tabelle sind die absoluten und relativen Fehler bei unterschiedlichen Messwerten gegeben:

Messwert in V	$F_{abs}$ in V	$F_{rel}$ in %
100	1	1
50	1	2
25	1	4
10	1	10

**2.4.2 Messabweichung bei Digitalgeräten**

Bei Digitalgeräten setzt sich der Messfehler aus anderen Komponenten als bei Analoggeräten zusammen.

$$F_{abs} = \frac{Abw\%}{100\%} \cdot x_M + \Delta Count \cdot X_{\Delta Count} \tag{2.15}$$

Hierbei ist  $Abw\%$  die maximale prozentuale Abweichung vom Anzeigewert.  $\Delta Count$  ist die maximale Abweichung der angezeigten Zahl auf der Anzeige und  $X_{\Delta Count}$  ist der Messwert der letzten Stelle.

Damit wird der relative Fehler in %

$$F_{rel} = Abw\% + \frac{\Delta Count \cdot X_{\Delta Count}}{x_M} \cdot 100\% \tag{2.16}$$

**Beispiel:**

In Abbildung 2.5 ist ein Teil der Kenndaten eines Digitalmultimeters zu sehen. Misst man einen Widerstand von  $47\Omega$  mit dem Gerät Fluke 175 im Messbereich bis  $600\Omega$ , so ergibt sich für den absoluten Fehler

$$F_{abs} = \frac{Abw\%}{100\%} \cdot x_M + \Delta Count \cdot X_{\Delta Count} = \frac{0,9\%}{100\%} \cdot 47\Omega + 2 \cdot 0,1\Omega = 0,623\Omega$$

und der relative Fehler ergibt sich zu

$$F_{rel} = Abw\% + \frac{\Delta Count \cdot X_{\Delta Count}}{x_M} \cdot 100\% = 0,9\% + \frac{2 \cdot 0,1\Omega}{47\Omega} \cdot 100\% = 1,33\%$$

**Models 175, 177 & 179**  
 Bedienungshandbuch

Funktion	Bereich <sup>1</sup>	Auflösung	Genauigkeit ( ± [ % des Meßwerts ] + [ Zählimpulse ] )		
			Modell 175	Modell 177	Modell 179
Wechselspannung Volt <sup>2,3</sup>	600,0 mV 6,000 V 60,00 V 600,0 V 1000 V	0,1 mV 0,001 V 0,01 V 0,1 V 1 V	1,0 % + 3 (45 Hz bis 500 Hz)	1,0 % + 3 (45 Hz bis 500 Hz)	1,0 % + 3 (45 Hz bis 500 Hz)
			2,0 % + 3 (500 Hz bis 1 kHz)	2,0 % + 3 (500 Hz bis 1 kHz)	2,0 % + 3 (500 Hz bis 1 kHz)
mV Gleichspannung	600,0 mV	0,1 mV	0,15 % + 2	0,09 % + 2	0,09 % + 2
Volt Gleichspannung	6,000 V 60,00 V 600,0 V 1000 V	0,001 V 0,01 V 0,1 V 1 V	0,15 % + 2	0,09 % + 2	0,09 % + 2
			0,15 % + 2	0,15 % + 2	0,15 % + 2
Kontinuität	600 Ω	1 Ω	Meßgerät piepst bei < 25 Ω; Piepser schaltet sich aus bei > 250 Ω; erkennt offene Schaltkreise und Kurzschlüsse von 250 µs oder länger.		
Ohm	600,0 Ω	0,1 Ω	0,9 % + 2	0,9 % + 2	0,9 % + 2
	6,000 kΩ	0,001 kΩ	0,9 % + 1	0,9 % + 1	0,9 % + 1
	60,00 kΩ	0,01 kΩ	0,9 % + 1	0,9 % + 1	0,9 % + 1
	600,0 kΩ	0,1 kΩ	0,9 % + 1	0,9 % + 1	0,9 % + 1
	6,000 MΩ	0,001 MΩ	0,9 % + 1	0,9 % + 1	0,9 % + 1
	50,00 MΩ	0,01 MΩ	1,5 % + 3	1,5 % + 3	1,5 % + 3

Abbildung 2.5: Datenblattauszug: Fluke 175

## 2.5 Mittelwerte

### 2.5.1 Arithmetisches Mittel

Der arithmetische Mittelwert ist die Summe der Einzelwerte geteilt durch die Anzahl der Werte. Dieser Mittelwert wird in der Technik am häufigsten verwendet.

$$\bar{x}_{Arith} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.17)$$

Der arithmetische Mittelwert wird stark verändert, wenn man einzelne „Ausreißer“ in der Messreihe hat.

### 2.5.2 Geometrisches Mittel

Geben Messreihen Verhältnisse wieder, z.B. relative Fehler oder Wachstumsprozesse, so ist der arithmetische Mittelwert nicht geeignet. Dann wird der geometrische Mittelwert verwendet.

$$\bar{x}_{Geo} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \quad (2.18)$$

Dieser Mittelwert kommt in technischen Bereichen eher selten vor.

### 2.5.3 Medianwert

Der Medianwert (oder Zentralwert) ist der Wert, bei dem die Hälfte der Messungen einen kleineren oder gleichen Wert und die andere Hälfte der Messungen einen

größeren oder gleichen Wert besitzt. Wenn die Anzahl der Werte gerade ist, wird der Median meist als arithmetisches Mittel der beiden mittleren Zahlen definiert, die dann Unter- und Obermedian heißen. Eine wichtige Eigenschaft des Medians ist Robustheit gegenüber Ausreißern.

### Beispiel:

Gegeben ist folgende Notenverteilung:

Note	1	2	3	4	5
Arbeitszahl	5	12	21	27	33

Insgesamt sind 98 Arbeiten vorhanden.

Für den Medianwert wird die Notenstufe gesucht, bei der 49 Studierende eine bessere oder gleich gute Arbeit haben und 49 Studierende eine schlechtere oder gleich gute Arbeit haben. Dies ist bei der Notenstufe 4 der Fall, woraus ein Medianwert  $\bar{x}_{Med} = 4$  folgt. (Der oben angesprochene Sonderfall würde z. B. eintreten, wenn es 43 mal die Note drei gäbe: dann wäre der Median der Mittelwert aus 3 und 4, also 3,5.)

### 2.5.4 Modalwert

Dies ist der am häufigsten vorkommende Wert (oder dichteste Wert) in der Verteilung. Falls es mehrere gleich hohe Maxima gibt, so ist der Modalwert nicht eindeutig definiert.

Im obigen Beispiel ist  $\bar{x}_{Mod} = 5$ .

## 2.6 Approximationsverfahren

Es liegt eine Anzahl von Messpunkten vor, der Zusammenhang zwischen ihnen soll durch eine Funktion abgebildet bzw. angenähert werden. Anders formuliert - es soll eine Kurve durch die gemessenen Punkte bestimmt werden, wobei die Abweichungen für alle Messpunkte möglichst gering sein sollen. Dies kann je nach Fall eine anspruchsvolle Aufgabe sein.

Es gibt eine Vielzahl von Verfahren, das beschriebene Problem zu lösen, von denen hier die am häufigsten benutzten kurz angerissen werden.

### 2.6.1 Geradenapproximation

#### Verfahren

- Der zu approximierende Bereich wird in Teilbereiche aufgeteilt, in denen die Kurve weitgehend linear ist

- Die zu approximierende Kurve wird in jedem Teilbereich durch eine Gerade angenähert
- Die Geradenparameter werden für jeden Teilbereich getrennt ermittelt
- Die Geradenstücke werden zusammengesetzt

### **Vorteile**

- Das Berechnungsverfahren ist sehr einfach
- Die Approximation ist für Interpolation zwischen den Messpunkten geeignet
- Die Approximation ist für Extrapolation geeignet

### **Nachteile**

- Es existiert oft keine geschlossene Lösung
- Die Gesamtlösung ist oft nicht differenzierbar
- Je nach Berechnungsverfahren ist die Lösung nicht stetig

## **2.6.2 Polynomapproximation**

### **Verfahren**

- Die gemessene Kurve wird durch ein Polynom höherer Ordnung angenähert
- Der Grad des Polynoms muss vor der Approximation festgelegt werden
- Die Lösung geschieht über ein lineares Gleichungssystem

### **Vorteile**

- Es existiert ein analytischer Ausdruck für die Lösung
- Die Lösung ist stetig und differenzierbar

### **Nachteile**

- Bei einem Polynom hoher Ordnung schwingt die Lösung zwischen den Messpunkten
- Dieses Verfahren ist für eine Extrapolation wenig geeignet

### 2.6.3 Spline-Approximation

#### Verfahren

- Die Messpunkte werden stückweise durch kubische Splines (Polynome dritten Grades) approximiert.
- Die Lösung geschieht über ein lineares Gleichungssystem

#### Vorteile

- Die Lösung ist stetig und differenzierbar

#### Nachteile

- Es existiert keine geschlossene Lösung

### 2.6.4 Analytische Approximation

#### Verfahren

- Die theoretische Kurve der gemessenen Punkte ist bekannt. Sie wurde mittels eines Modells (am besten mit Hilfe der zugrunde liegenden Physik) gebildet.
- Es werden die quadratischen Abweichungen zwischen der Modellkurve und den Messpunkten minimiert
- Die Parameter der theoretischen Kurve werden mittels der Approximation bestimmt

#### Vorteile

- Es existiert ein analytischer Ausdruck für die gesamte Approximationsfunktion
- Die Kurve ist stetig und differenzierbar
- Die approximierte Kurve ist am dichtesten an der Realität (sofern das Modell des Systems korrekt ist)
- Das theoretische Modell kann mittels der gemessenen Kurve angepasst werden

#### Nachteile

- Sehr hoher Aufwand für die Modellbildung und Berechnung



### Verfahren zur analytischen Approximation – Regression

Dieses Verfahren ist eines von vielen analytischen Approximationsverfahren. Untersucht wird, wie gut die mit theoretischen Überlegungen gefundene Kurve mit den gemessenen Daten übereinstimmt.

Die Regression kann für beliebige theoretische Kurven angewendet werden. Hier wird als einfachster Fall die lineare Regression vorgestellt.

Gegeben sind mehrere Messpunkte. Durch theoretische Überlegungen ist bekannt, dass die Messpunkte auf einer Geraden liegen. Diese Gerade soll bestimmt werden.

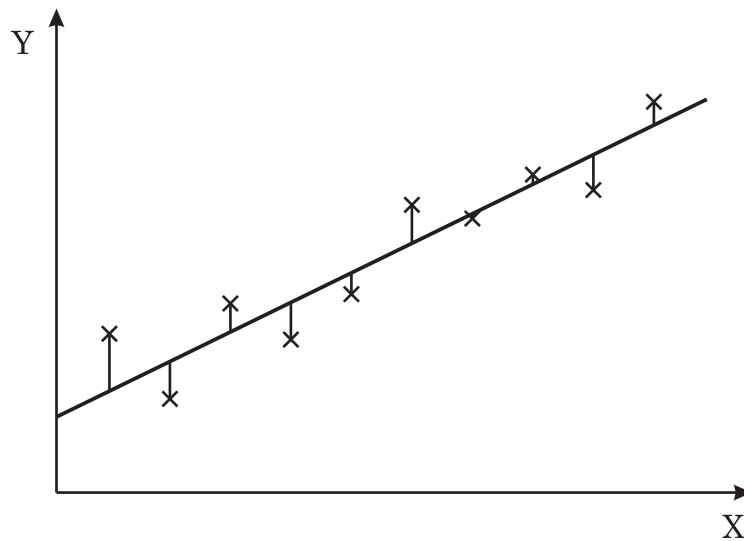


Abbildung 2.6: Lineare Regression

Des weiteren nimmt man an, dass die X-Werte korrekt sind und die Y-Werte fehlerbehaftet sind (wie in Abbildung 2.6 dargestellt). Die lineare Regression ermittelt die Gerade, bei der die Summe der Fehlerquadrate minimal wird.

$$SAQ(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - b \cdot x_i)^2 \rightarrow \text{Min.} \quad (2.19)$$

Hierbei wird mit  $SAQ$  die Summe der Fehlerquadrate bezeichnet. Die Geradengleichung für die Ausgleichsgerade ist

$$y = a + b \cdot x \quad (2.20)$$

Zur Ermittlung der Parameter  $a$  und  $b$  sucht man das Minimum von (2.19), indem

man sie nach den beiden Parametern partiell ableitet.

$$\frac{\partial SAQ(a, b)}{\partial a} = \sum_{i=1}^n (2 \cdot (y_i - a - b \cdot x_i) \cdot (-1)) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial SAQ(a, b)}{\partial b} = \sum_{i=1}^n (2 \cdot (y_i - a - b \cdot x_i) \cdot (-x_i)) \quad (2.22)$$

(2.21) wird gleich 0 gesetzt und umgeformt:

$$\sum_{i=1}^n (2 \cdot (y_i - a - b \cdot x_i) \cdot (-1)) = 0 \quad (2.23)$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a - b \cdot x_i) = 0 \quad (2.24)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i - n \cdot a - b \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad (2.25)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n y_i = n \cdot a + b \sum_{i=1}^n x_i} \quad (2.26)$$

Anschließend wird mit (2.22) ähnlich verfahren:

$$\sum_{i=1}^n (2 \cdot (y_i - a - b \cdot x_i) \cdot (-x_i)) = 0 \quad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i \cdot x_i - a \cdot x_i - b \cdot x_i^2) = 0 \quad (2.28)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) - a \sum_{i=1}^n x_i - b \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \quad (2.29)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (2.30)$$

(2.26) und (2.30) sind die beiden Normalgleichungen, mit denen man  $a$  und  $b$  berechnen kann. Dazu werden die beiden Gleichungen ineinander eingesetzt und man erhält:

$$\boxed{b = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}} \quad (2.31)$$

$$\boxed{a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}} \quad (2.32)$$

**Alternative Rechnung:**

Man kann auch alternativ Zwischenvariablen definieren und damit (2.31) umschreiben.

$$S_{XX} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.33)$$

$$S_{YY} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (2.34)$$

$$S_{XY} = \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})) = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \quad (2.35)$$

Dabei sind

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.36)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.37)$$

Damit kann man ebenfalls die beiden Geradenparameter berechnen:

$$b = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \quad (2.38)$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} \quad (2.32)$$

**Korrelationskoeffizient**

Der Korrelationskoeffizient  $r$  gibt an, wie stark die Punktwolke einer Geraden ähnelt.

$$r(x, y) = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} \cdot S_{YY}}} \quad (2.39)$$

$r = 1$ :	alle Punkte liegen auf einer steigenden Geraden
$r > 0$ :	positive Korrelation, monoton wachsender Zusammenhang
$r \approx 0$ :	keine Korrelation
$r < 0$ :	negative Korrelation, monoton fallender Zusammenhang
$r = -1$ :	alle Punkte liegen auf einer fallenden Geraden

**Beispiel:**

Es sind folgende Wertepaare gegeben  $(x_i, y_i)$ : (3, 2), (7, 4), (12, 5)  
Gesucht werden

- Korrelationskoeffizient  $r$
- Parameter der Regressionsgeraden  $a$  und  $b$

Berechnung der Parameter:

	$x_i$	$y_i$	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
	3	2	$-4, \bar{3}$	$-1, \bar{6}$	$18, \bar{7}$	$2, \bar{7}$	$7, \bar{2}$
	7	4	$-0, \bar{3}$	$0, \bar{3}$	$0, \bar{1}$	$0, \bar{1}$	$-0, \bar{1}$
	12	5	$4, \bar{6}$	$1, \bar{3}$	$21, \bar{7}$	$1, \bar{7}$	$6, \bar{2}$
$\Sigma$	22	11			$S_{XX} = 40, \bar{6}$	$S_{YY} = 4, \bar{6}$	$S_{XY} = 13, \bar{3}$

Damit wird

$$\text{Korrelationskoeffizient } r = 0,9679$$

$$\text{Steigung } b = 0,3279$$

$$\text{Achsenabschnitt } a = 1,2623$$

## 2.7 Verteilungen

Es gibt eine Vielzahl von Verteilungen. Von diesen werden die am häufigsten gebrauchten hier vorgestellt.

### 2.7.1 Gleichverteilung

Es gibt einen begrenzten Wertebereich. Die Eintreffwahrscheinlichkeit für jeden Wert ist gleich hoch, wie z.B. beim Würfeln (siehe Abbildung 2.7)

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis  $x_i$  eintritt, ist

$$p(x_i) = \frac{1}{n} \quad (2.40)$$

Hierbei ist  $n$  die Zahl der möglichen Zustände.

Sind kontinuierliche Zustände möglich, so erhält man eine Rechteckverteilung. Hier muss man immer die Wahrscheinlichkeit betrachten, mit der ein Ereignis in einem gewissen Intervall innerhalb der Rechteckverteilung liegt.

#### Beispiel:

Ein Autofahrer fährt eine Strecke von 80km. Zwischen Kilometer 30 und Kilometer 40 ist ein Funkloch, in dem kein Handy-Empfang möglich ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er einen Anruf auf seinem Handy während der Fahrt verpasst, wenn die Anrufwahrscheinlichkeit zu jeder Zeit gleich groß ist?

$$p = \frac{1}{80km} \cdot (40km - 30km) = 0,125 \hat{=} 12,5\%$$

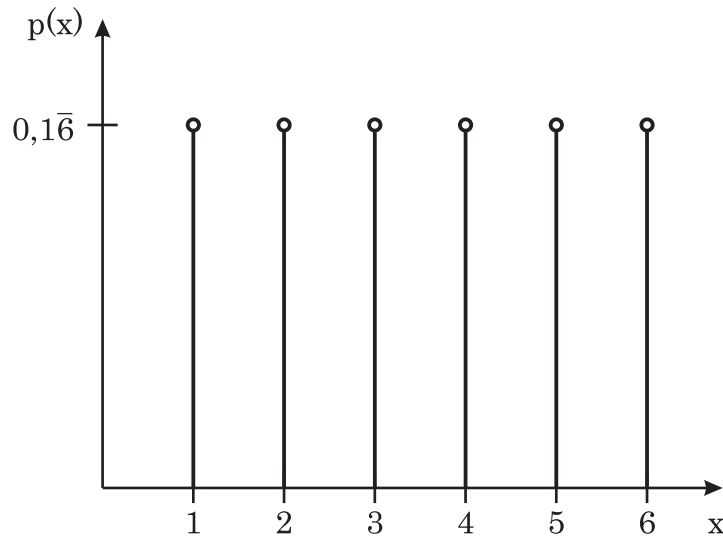


Abbildung 2.7: Gleichverteilung

### 2.7.2 Gauß-Verteilung

Die in der Ingenieurpraxis am häufigsten vorkommende Verteilung ist die Gauß-Verteilung oder Normalverteilung.

So sind z.B. Kenndatenverteilungen von Bauteilen oder technischen Produkten meist Gauß-Verteilungen.

#### Verteilungsfunktion

Bei der Normalverteilung hat die Verteilungsfunktion  $p(x)$  folgende Gleichung:

$$p(x) = \frac{1}{s \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}} \quad (2.41)$$

Hierbei ist  $s$  die Standardabweichung, die ein Maß für die Breite der Kurve ist.  $\bar{x}$  ist der Erwartungswert, der die Lage des Verteilungsmaximums angibt. In [Abbildung 2.8](#) ist die Gauß-Kurve zu sehen.

Integriert man die Funktion  $p(x)$  von einem Wert  $x_1$  bis zu einem Wert  $x_2$ , so erhält man die Häufigkeit, in dem ein Wert  $x$  innerhalb dieses Intervalls liegt.

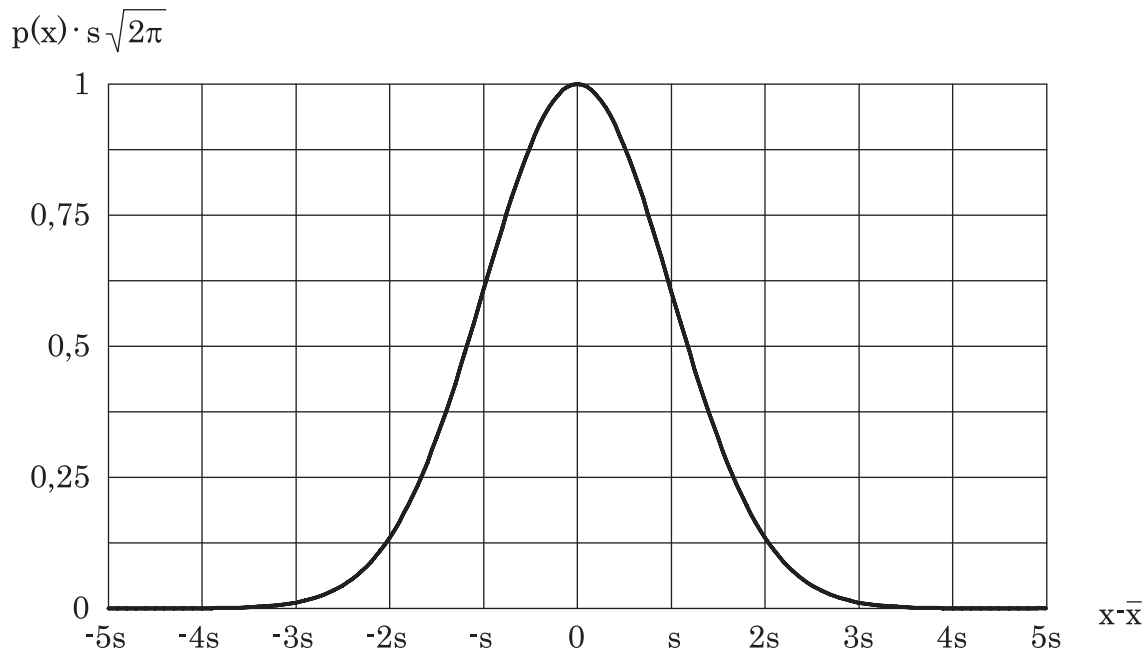


Abbildung 2.8: Gauß-Verteilung

Intervall von	bis	Auftritts- wahrscheinlichkeit
-0,67s	0,67s	50%
-s	s	68,27%
-1,96s	1,96s	95%
-2s	2s	95,45%
-2,58s	2,58s	99%
-3s	3s	99,73%
-4s	4s	99,99%

### Berechnung von Erwartungswert und Standardabweichung

Der Erwartungswert  $\bar{x}$  ist gleich dem arithmetischen Mittelwert der Einzelmessungen. Dieser ist nach Kapitel 2.5.1

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.17)$$

Die Standardabweichung  $s$  ist

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.42)$$

Relativ häufig wird die **Varianz**  $v$  der Gauß-Verteilung angegeben. Diese ist

$$\boxed{v = s^2} \quad (2.43)$$

### Beispiel:

Sie stellen Widerstände her. Für ihre Widerstände mit  $R = 100\Omega \pm 1\%$  garantieren sie, dass 99,99% in diesem Wertebereich sind.

Welche Standardabweichung darf ihr Produktionsprozess haben, wenn die Widerstandswerte gaußförmig verteilt sind?

Die Widerstandstoleranz ist

$$\Delta R = 100\Omega \cdot 0,01 = 1\Omega$$

99,99% der Widerstände sind nach der Tabelle für die Gaußverteilung innerhalb von  $\pm 4s$ . Aus diesem Grund muss ihr Produktionsprozess eine Standardabweichung von

$$s = \frac{1\Omega}{4} = 0,25\Omega$$

besitzen.

### 2.7.3 Ausfallhäufigkeit während des Betriebs

Es ist oft interessant, wie die Ausfallhäufigkeit eines Gerätes in Abhängigkeit der Betriebszeit ist. Dies ist wichtig für die Übernahme von Garantien. Die meisten Geräte besitzen vorgeschriebene Wartungsintervalle, die anhand von prognostizierten Ausfallhäufigkeiten berechnet werden. In Abbildung 2.9 ist eine solche Kurve der Ausfallhäufigkeit in Abhängigkeit der Betriebsdauer zu sehen. Diese Kurve wird in der Praxis oft „Badewannenkurve“ genannt.

Während des Betriebsbeginns ist die Ausfallrate relativ hoch durch Bauteile, die vorgeschädigt sind und durch unentdeckte Produktionsmängel. Diese Fehler können beim Hersteller durch einen „Burn-In-Test“ entdeckt werden.

Während der normalen Lebensdauer des Gerätes ist die Ausfallrate sehr niedrig.

Zum Ende der Lebensdauer steigt die Ausfallrate durch Verschleiß der Teile langsam an und erreicht irgendwann einen Punkt, an dem sie oberhalb einer definierten Grenze ist. Dieser Punkt wird als „End of Life“ (EOL) bezeichnet, da ab dann der Betrieb zu riskant wird oder wirtschaftlich nicht mehr sinnvoll ist.

Meist sind analytische Modelle für die Ausfallzeit eines Gerätes zu komplex. Aus diesem Grund ermittelt man die Ausfallhäufigkeiten aufgrund von Erfahrungen und Tests an Mustern.

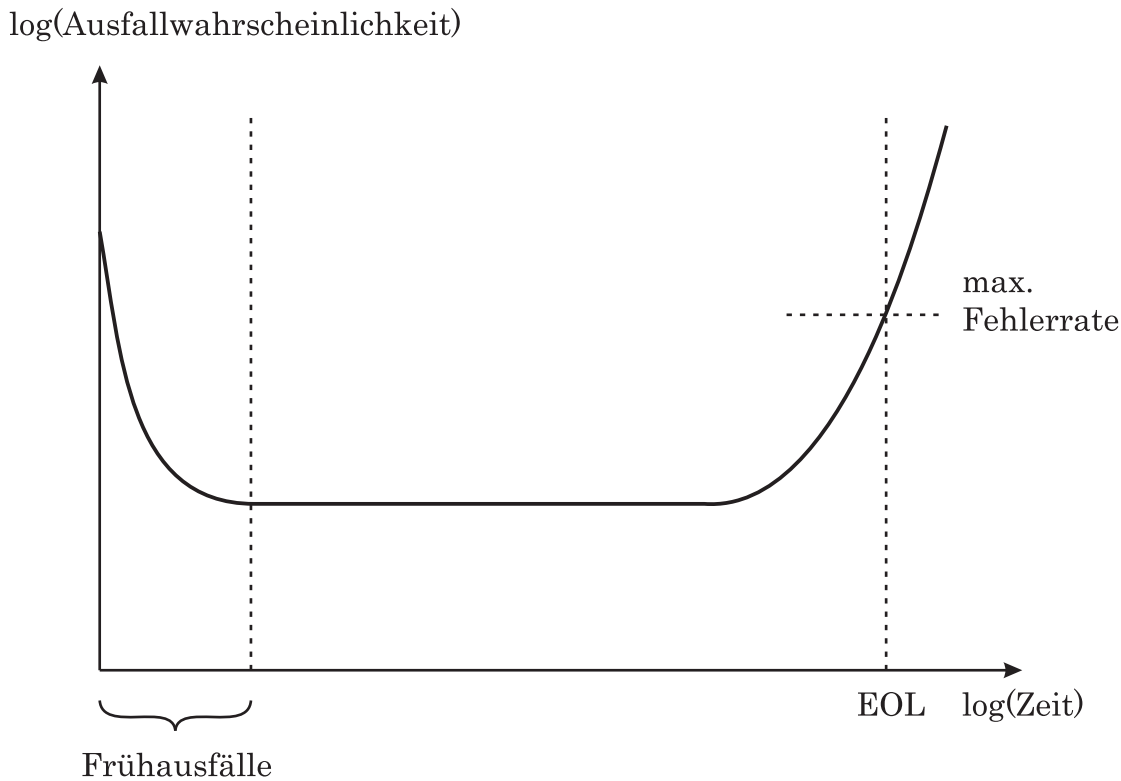


Abbildung 2.9: Empirische Zeitverteilung der Ausfallhäufigkeit

## 2.8 Fehlerfortpflanzung

In der Praxis kommt folgender Fall relativ häufig vor:

Man hat eine elektronische Schaltung oder einen Messaufbau. Von den Bauteilen bzw. Messgeräten sind die Streuungen bzw. Fehlergrenzen bekannt. Man will nun wissen, wie groß der Gesamtfehler der Anordnung ist. Da der tatsächliche Fehler inkl. Vorzeichen normalerweise nicht bekannt ist, muss man betragsmäßig mit den Fehlergrenzen rechnen, d.h. den schlimmsten Fall annehmen.

### 2.8.1 Allgemeine Gleichungen für die Fortpflanzung von Fehlergrenzen

Die Gleichungen für die Fehlerfortpflanzung sind immer lineare Näherungen an die tatsächliche Funktion. Diese Näherung ist möglich, solange die Fehler klein gegenüber den Messgrößen sind, was in der Praxis meist gegeben ist.

Man hat eine Ergebnisfunktion  $y$ , deren Eingangsgrößen die Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sind.

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (2.44)$$



Nun soll der Fehler  $\Delta y$  der Ausgangsgröße  $y$  in Abhängigkeit der Fehler der Eingangsgrößen berechnet werden.

### Maximalfehler

Wenn die absolute Obergrenze des Fehlers  $\Delta y$  verlangt ist, so werden die einzelnen Fehlerbeiträge addiert.

$$\Delta y_{max} \approx \sum_{i=1}^n \left( \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_{i,max} \right| \right) \quad (2.45)$$

### Mittlerer Fehler

Sind die Fehlerverteilungen der Eingangsgrößen  $x_i$  gaußförmig und möchte man den mittleren Gesamtfehler der Ausgangsgröße ermitteln, so wendet man folgende Rechenregel an:

$$\overline{\Delta y} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2} \quad (2.46)$$

### Standardabweichung

Die Werteverteilung der Eingangsvariablen ist gaußförmig. Die Standardabweichungen  $s_i$  der Eingangsvariablen  $x_i$  sind gegeben. Die Standardabweichung des Ergebnisses  $s_y$  soll ermittelt werden.

$$s_y \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot s_i \right)^2} \quad (2.47)$$

### Beispiel:

Ein Produkt wird automatisch verpackt. Gegeben ist die mittlere Masse der Verpackung mit  $\bar{g}_1 = 30g$ . Die Standardabweichung der Verpackungsmasse beträgt  $s_1 = 2g$ . Die Masse des Inhaltes ist  $\bar{g}_2 = 500g$  mit einer Standardabweichung von  $s_2 = 5g$ .

Wie groß ist die Gesamtmasse  $g_3$  des Produktes und wie groß ist die Standardabweichung  $s_3$ ? In welchem Massenbereich sind 99% der Produkte verteilt?

$$\begin{aligned} \bar{g}_3 &= \bar{g}_1 + \bar{g}_2 = 30g + 500g = 530g \\ s_3 &\approx \sqrt{\left( \frac{\partial g_3}{\partial g_1} \cdot s_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial g_3}{\partial g_2} \cdot s_2 \right)^2} \\ &= \sqrt{(1 \cdot 2)^2 + (1 \cdot 5)^2} g = \sqrt{4 + 25} g = 5,4g \end{aligned}$$

99% der Produkte sind in einem Massenbereich von

$$g_3 = (530 \pm 13,9) g$$

verteilt.

## 2.8.2 Fortpflanzung der Fehlergrenzen bei bestimmten Rechnungen

Aus obigen Formeln können auch allgemein gültige einfache Zusammenhänge für einfache Rechenoperationen hergeleitet werden. Im Folgenden wird dies für Addition und Multiplikation demonstriert:

### Addition / Subtraktion

Werden zwei fehlerbehaftete Größen addiert oder subtrahiert, so addieren sich auch die absoluten Fehlergrenzen:

$$\begin{aligned} y &= x_1 + x_2 \\ \Delta y &\approx \left| \frac{\partial (x_1 + x_2)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial (x_1 + x_2)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 \right| \\ &= 1 \cdot \Delta x_1 + 1 \cdot \Delta x_2 \\ &= \Delta x_1 + \Delta x_2 \end{aligned}$$

Dies kann auch mit einer direkten Rechnung anschaulich nachvollzogen werden (in diesem Spezialfall liefern die allgemeinen Formeln sogar exakte Werte):

$$\begin{aligned} y \pm \Delta y &= (x_1 \pm \Delta x_1) + (x_2 \pm \Delta x_2) = (x_1 + x_2) \pm (\Delta x_1 + \Delta x_2) \\ \Delta y &= \Delta x_1 + \Delta x_2 \end{aligned}$$

### Multiplikation / Division

Bei der Multiplikation bzw. Division von Größen ergibt sich der gesamte Maximalfehler näherungsweise aus der Addition der relativen Fehlergrenzen:

$$\begin{aligned} y &= x_1 \cdot x_2 \\ \Delta y &\approx \left| \frac{\partial (x_1 \cdot x_2)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial (x_1 \cdot x_2)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 \right| \\ &= x_2 \cdot \Delta x_1 + x_1 \cdot \Delta x_2 \\ \frac{\Delta y}{y} &\approx \frac{x_2 \cdot \Delta x_1 + x_1 \cdot \Delta x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der direkten Rechnung zeigt, dass die allgemeinen Formeln in diesem Fall das Produkt aus den zwei Absolutfehlern vernachlässigen (da beide Absolutfehler kleine Zahlen sind, ist ihr Produkt i. A. sehr viel kleiner als die restlichen Terme der Summe):

$$\begin{aligned} y \pm \Delta y &= (x_1 \pm \Delta x_1) \cdot (x_2 \pm \Delta x_2) \\ &= x_1 \cdot x_2 \pm x_1 \cdot \Delta x_2 \pm x_2 \cdot \Delta x_1 \pm \underbrace{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2}_{\approx 0} \end{aligned}$$

Analoge Zusammenhänge können auch für andere Rechenoperationen hergeleitet werden. Ebenso ist es bei einfachen Rechnungen möglich, zumindest für den Maximalfehler einfach die entsprechenden Zahlenwerte einzusetzen. Im Allgemeinen und insbesondere bei gemischten Rechenoperationen empfiehlt sich jedoch, die allgemein gültigen Formeln 2.45 - 2.47 zu verwenden.

### 2.8.3 Praxisanleitung für die Berechnung von Fehlern

In der Praxis eines Entwicklers kommen Fehlerrechnungen relativ häufig vor. So zum Beispiel bei der

- Abschätzung der Funktionsfähigkeit eines Konzeptes,
- Erstellungen von Angaben für ein Datenblatt,
- Abgaben von Garantiewerten gegenüber einen Kunden,
- Ermittlung von sicherheitsrelevanten Kenngrößen,
- Berechnung der Ausschussquote in der Produktion,
- ...

Die beiden wesentlichen Methoden zur Berechnung sind die Addition der Beträge der Maximalfehler gemäß (2.45) und die quadratische Addition von mittleren Fehlern gemäß (2.46).

Sollen die Obergrenzen von Fehlern angegeben werden, z.B. bei sicherheitsrelevanten Größen oder bei Garantien gegenüber Kunden, so müssen die Beträge der Fehler addiert werden. Dies kann bei einer großen Anzahl kleiner Fehlerbeträge zu einem erschreckend großen Gesamtfehler führen.

Aus diesem Grund wird für Datenblattangaben oder typischen Werten meist die quadratische Addition der mittleren Fehler benutzt. Je nach toleriertem Prozentsatz der Produkte außerhalb dieser angegebenen Fehlergrenzen wird der mittlere Fehler mit einem entsprechenden Faktor multipliziert.

## 3 Übertragungsfunktion und dynamische Messunsicherheiten

In jeder realen Messanordnung müssen auch zeitliche Messunsicherheiten berücksichtigt werden. Kein Messgerät kann dem zu messenden Eingangssignal beliebig schnell folgen, da grundsätzlich mindestens einer der folgenden Effekte zu berücksichtigen ist:

- Reibungs- und Dämpfungswiderstände müssen überwunden,
- Massen müssen beschleunigt oder abgebremst,
- Ladungen müssen bewegt werden.

### 3.1 Übertragungsfunktion

Am Einfachsten untersucht bzw. beschreibt man das dynamische Verhalten eines Messsystems, indem man die zeitliche Reaktion auf eine bekannte zeitabhängige Eingangsgröße angibt. Dazu bieten sich folgende Testfunktionen an:

#### **Sprungfunktion**

Am Anschaulichsten ist es, als Testfunktion eine Sprungfunktion zu verwenden, welche zu einem Einschaltzeitpunkt einen idealen Sprung von Null auf einen definierten Wert vollzieht. Am Ausgang des Messsystems kann man dann beobachten, wie schnell das System reagiert. Die gemessene Ausgangskurve nennt man dementsprechend Sprungantwort oder Übergangsfunktion. Abbildung 3.3 zeigt ein Beispiel für eine solche Sprungantwort.

#### **Impulsfunktion**

Wenn man als Testfunktion einen unendlich kurzen Impuls verwendet, bekommt man i. W. dieselbe Information über das dynamische Verhalten des Messsystems. Es ergibt sich zwar eine andere Ausgangskurve (die Impulsantwort oder Gewichtsfunktion), mathematisch lassen sich die zwei Verfahren jedoch mittels Differentialgleichungen ineinander überführen, liefern also dieselbe Information. Anschaulich

ist dies am Beispiel RC-Glied in Abschnitt 3.1.1 dargestellt.

Da unendlich steile bzw. unendlich schmale Sprünge technisch nicht realisierbar sind, können beide bisher genannten Verfahren nur mit endlicher Genauigkeit realisiert werden. Außerdem ist es wünschenswert, Messsysteme einheitlich zu beschreiben, damit man nicht immer zwischen verschiedenen Verfahren umrechnen muss. Als zweckmäßige Darstellung des dynamischen Verhaltens hat sich der sog. Frequenzgang etabliert, bei dem die Antwort des Messsystems auf eine normierte Eingangsgröße in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt wird. Somit kann man sofort beurteilen, wie ein gegebenes System bei schnellen (hohe Frequenzen) bzw. langsamen (niedrige Frequenzen) Änderungen des Eingangssignals reagiert.

### Sinusfunktion

Die Antwort eines Messsystems auf eine bestimmte Frequenz kann man auch direkt messen, indem man eine Sinusfunktion mit der gewünschten Frequenz als Testfunktion verwendet. Somit kann man auch den Frequenzgang mittels Sinusfunktionen bestimmen, indem man mehrere Messungen mit unterschiedlichen Frequenzen nacheinander durchführt. An dieser Stelle wird klar, dass der Frequenzgang komplexe Größen über der Frequenz darstellt, da die Veränderung einer Sinusfunktion in Betrag und Phase (bzw. Real- und Imaginärteil) am einfachsten durch komplexe Zahlen erfasst wird. Der Frequenzgang besteht also grundsätzlich aus zwei Diagrammen: Betrag und Phase werden jeweils als Funktion der Frequenz dargestellt (Abbildung 3.2).

Auch die Untersuchung eines Messsystems mittels Sinusfunktionen liefert also dieselbe Information wie Sprung- bzw. Impulsfunktion. Dies wird klar, wenn man bedenkt, dass Sprung- bzw. Impulsfunktion lt. Fourier-Analyse auch als Überlagerung unendlich vieler Sinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen beschrieben werden können. Vorteil der Sinusfunktion ist, dass man gezielt einzelne Frequenzen untersuchen kann. Da man für einen kompletten Frequenzgang mittels Sinusfunktionen sehr viele Messungen nacheinander machen muss, ist diese Messung dagegen aufwendiger.

#### 3.1.1 Beispiel RC-Glied

Als einfaches Beispiel betrachten wir eine Messanordnung, deren dynamisches Verhalten durch folgende Schaltung beschrieben werden kann:

Um das frequenzabhängige (und damit das zeitabhängige) Verhalten der Schaltung zu beschreiben, gehen wir von sinusförmigen Größen  $u_e$  und  $u_a$  aus und verwenden die komplexe Schreibweise. Damit ist der Zusammenhang zwischen  $\underline{U}_a$  und  $\underline{U}_e$  durch einen einfachen komplexen Spannungsteiler zu ermitteln:

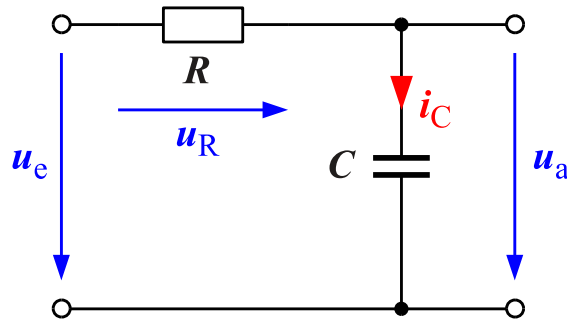


Abbildung 3.1: Einfaches Ersatzschaltbild eines Messsystems

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = G(j\omega) \quad (3.1)$$

Nach Betrag und Phase dargestellt erhält man:

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (3.2)$$

$$\phi_G(\omega) = -\arctan\{\omega RC\} \quad (3.3)$$

Den komplexen Quotienten  $G(j\omega)$  nennt man die **Übertragungsfunktion** des Systems. Der Frequenzgang dieser Übertragungsfunktion ist in Abbildung 3.2 nach Betrag und Phase dargestellt. Offensichtlich werden niedrige Frequenzen ungedämpft und ohne Veränderung der Phase übertragen, während mit zunehmender Frequenz die Dämpfung zunimmt und sich die Schaltung zunehmend kapazitiv verhält. Daher bezeichnet man eine solche Schaltung auch als **Tiefpass**. Die (Kreis-)Frequenz, bei der der Betrag auf  $1/\sqrt{2}$  abgefallen ist bzw. die Phase die Hälfte der Gesamtänderung vollzogen hat (hier  $-45^\circ$ ), bezeichnet man als **Grenzfrequenz**  $\omega_g$  bzw.  $f_g$ .

Bei Messsystemen, welche durch solch einen Tiefpass als Ersatzschaltung beschrieben werden können, kommt es also bei zunehmender Frequenz der Messsignale zunehmend zu zusätzlichen, dynamischen Messfehlern. Wenn ein Messsystem bei seiner Grenzfrequenz betrieben wird, zeigt es nur  $1/\sqrt{2} = 71\%$  des tatsächlichen Messwerts an! Üblicherweise sollten Messgeräte bis maximal  $1/10$  der Grenzfrequenz betrieben werden.

An diesem einfachen Ersatzschaltbild kann man auch anschaulich machen, wie die Ermittlung des Frequenzgangs mittels Sinusfunktionen mit der Antwort auf Sprung- bzw. Impulsfunktion zusammenhängt:

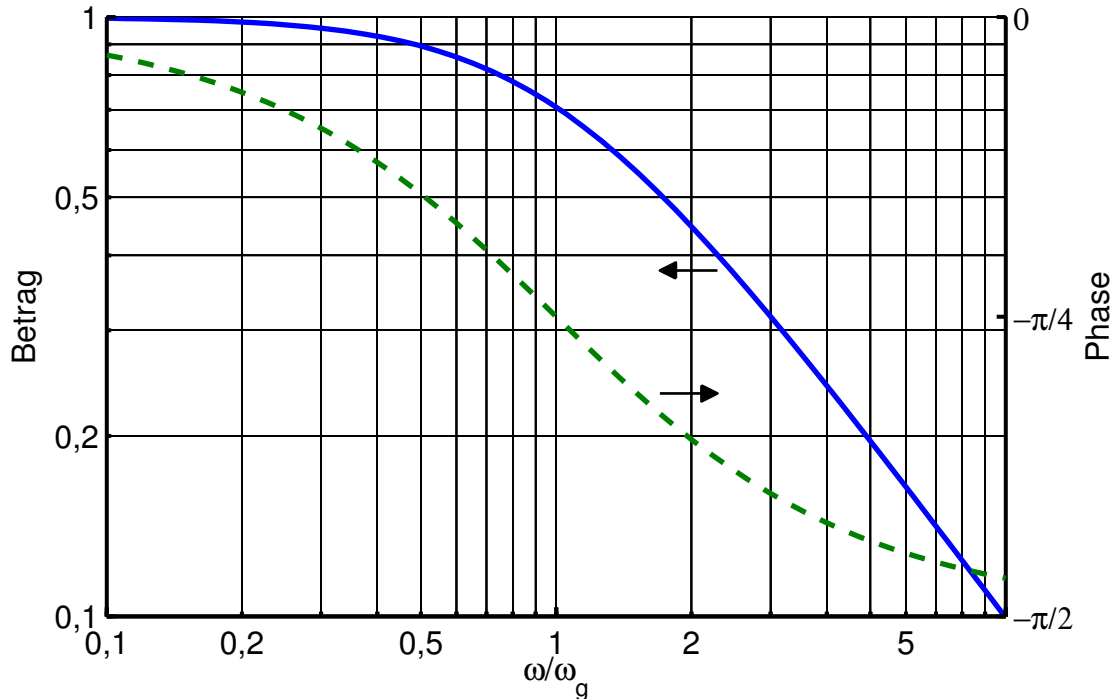


Abbildung 3.2: Frequenzgang des RC-Ersatzschaltbildes nach Betrag (durchgezogen) und Phase (gestrichelt)

### Sprungantwort

Die Spannung  $u_e$  in der Schaltung aus Abbildung 3.1 wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  sprunghaft von 0 V auf  $U_0$  gesetzt. Die gesuchte Sprungantwort ist der zeitliche Verlauf der Spannung  $u_a$ . Diese Fragestellung beschreibt jedoch nichts anderes als den Einschaltvorgang eines Kondensators mit Serienwiderstand. Wie aus den Grundlagen der Elektrotechnik bekannt, ergibt sich eine exponentiell steigende Spannung am Kondensator. Bezogen auf die Höhe der Eingangsspannung  $U_0$  lautet diese

$$\frac{u_a}{U_0} = 1 - e^{-t/\tau} \quad (3.4)$$

mit  $\tau = R \cdot C$ .

### Impulsantwort

Für die Impulsantwort kann in ähnlicher Weise argumentiert werden: Durch den Impuls wird der Kondensator zu einem gewissen Grad aufgeladen. Die Fläche des idealen, unendlich schmalen Impulses wird z. B. so gewählt, dass der Kondensator bereits zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf eine Spannung  $U_0$  aufgeladen ist. Da die Spannungsquelle anschließend einen Wert von 0 V besitzt, entspricht sie einem idealen

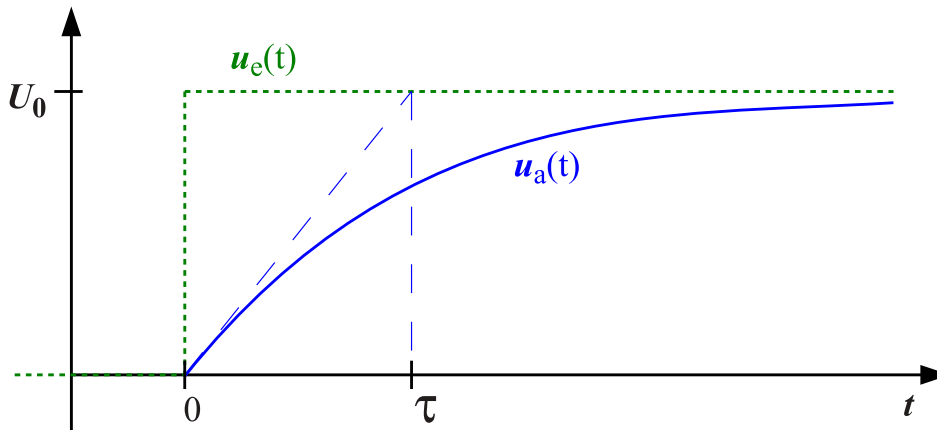


Abbildung 3.3: Sprungantwort des RC-Glieds

Kurzschluss. Damit entspricht die Frage nach dem zeitlichen Verlauf der Spannung  $u_a$  genau dem Entladevorgang eines Kondensators mit Parallelwiderstand  $R$ . Somit ist die Impulsantwort

$$\frac{u_a}{U_0} = e^{-t/\tau} \quad (3.5)$$

ebenfalls mit  $\tau = R \cdot C$ .

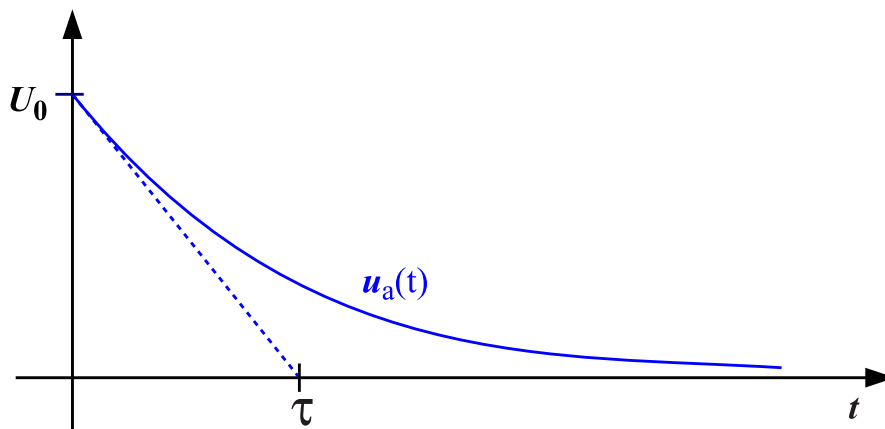


Abbildung 3.4: Impulsantwort des RC-Glieds

Sprungantwort und Impulsantwort beschreiben also zumindest in diesem Fall anschaulich genau dieselben zeitlichen Zusammenhänge. Zusätzlich sind diese zwei



Verläufe im Zeitbereich identisch mit den Aussagen der Sinusantwort: Das hergeleitete Tiefpassverhalten (Abbildung 3.2) bedeutet, dass höhere Frequenzen zunehmend gedämpft werden. Laut Fourier-Analyse beinhaltet ein abrupter Sprung jedoch unendlich hohe Frequenzen (um die unendlich hohe Steigung abzubilden). Wenn man nun aus einem idealen Sprung die hohen Frequenzen entfernt, sinkt die Steigung und man erhält exponentiell steigende bzw. fallende Kurven wie in Abbildungen 3.3 und 3.4. Der Zusammenhang zwischen den charakteristischen Größen Zeitkonstante  $\tau$  und Grenzfrequenz  $\omega_g$  ergibt sich aus folgenden Überlegungen: Aus 3.1 und 3.2 bestimmen wir das Verhältnis des Betrags von Ausgangs- zur Eingangsspannung

$$\frac{|U_a|}{|U_e|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

Laut Definition beträgt dieses Verhältnis bei der Grenzfrequenz  $\omega_g$  genau  $1/\sqrt{2}$ , also

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_g\tau)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 + (\omega_g\tau)^2 &= 2 \\ \omega_g\tau &= 1 \end{aligned}$$

und somit ist der Zusammenhang zwischen  $\tau$  und  $\omega_g$

$$\tau = \frac{1}{\omega_g} = \frac{1}{2\pi f_g} = R \cdot C \quad (3.6)$$

Sowohl das Zeit- als auch das Frequenzverhalten lässt sich also wahlweise durch die Sinus-, Sprung- oder Impulsantwort mit nur einem gemeinsamen Parameter bestimmen.

## Übertragungsfunktion

Als Übertragungsfunktion bezeichnet man allgemein den Quotient aus Ausgangs- und Eingangsgröße eines Systems. Bei zeitabhängigen Signalen erhält man durch komplexe Rechnung eine komplexe Übertragungsfunktion, welche im sog. Frequenzgang nach Betrag und Phase über der Frequenz dargestellt wird.

## 3.2 Dynamische Messfehler

Jedes Messgerät benötigt eine gewisse Zeit, um nach dem Beginn der Messung den Endwert zu erreichen. Während dieser Zeit tritt ein dynamischer Messfehler auf.

In Abbildung 3.5 sieht man schematisch das Verhalten eines Messsystems. Zu einem Zeitpunkt  $t = 0$  ändert sich die Eingangsgröße. Der Ausgang des Systems folgt diesem Sprung und schwingt auf eine neue Ausgangsgröße ein.

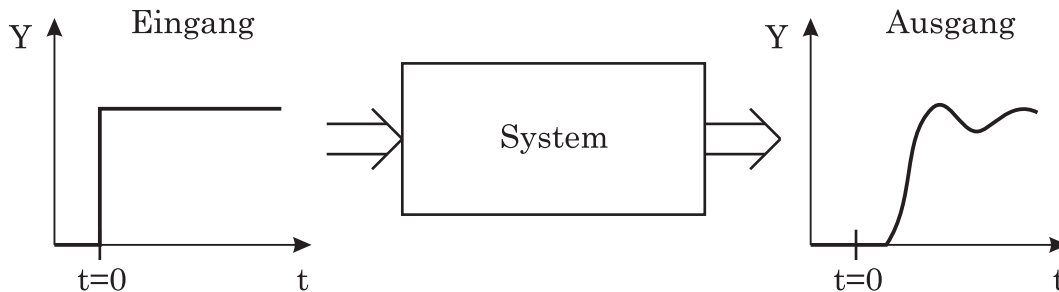


Abbildung 3.5: Messsystem

### 3.2.1 Definition der Einschwingzeit

Im allgemeinen ist es interessant, wie lange ein Messgerät braucht, bis es einen Wert innerhalb eines festgelegten Fehlerintervalls anzeigt. Das Maß dafür ist die Einschwingzeit (Abbildung 3.6).

Die Einschwingzeit ist die Zeit, bei der das Messsystem einen Wert im zulässigen Toleranzbereich um den statischen Endwert zeigt und dieses Toleranzband nicht mehr verlässt.

Zur Definition der Einschwingzeit muss zuerst festgelegt werden, wie groß das erlaubte Fehlerband um den Endwert ist. Dies kann bei groben Messungen  $\pm 5\%$  oder  $\pm 1\%$  sein. Bei sehr genauen Messungen ist es entsprechend kleiner. Die Einschwingzeit kann aus dem Modell des Messsystems berechnet werden.

Anschließend wird das Messsystem so konfiguriert, dass nach Beginn einer Messung zuerst die Einschwingzeit abgewartet wird, bevor der erste Messwert ausgelesen wird.

### 3.2.2 Verringerung der Einschwingzeit

Ist die Einschwingzeit der dominierende Faktor bei einer Messung, so wird eine Reduzierung angestrebt.

Hier wird als Beispiel ein Messsystem betrachtet, das ein Tiefpassverhalten erster Ordnung zeigt und dessen Einschwingzeit verringert werden soll. In Abbildung 3.7

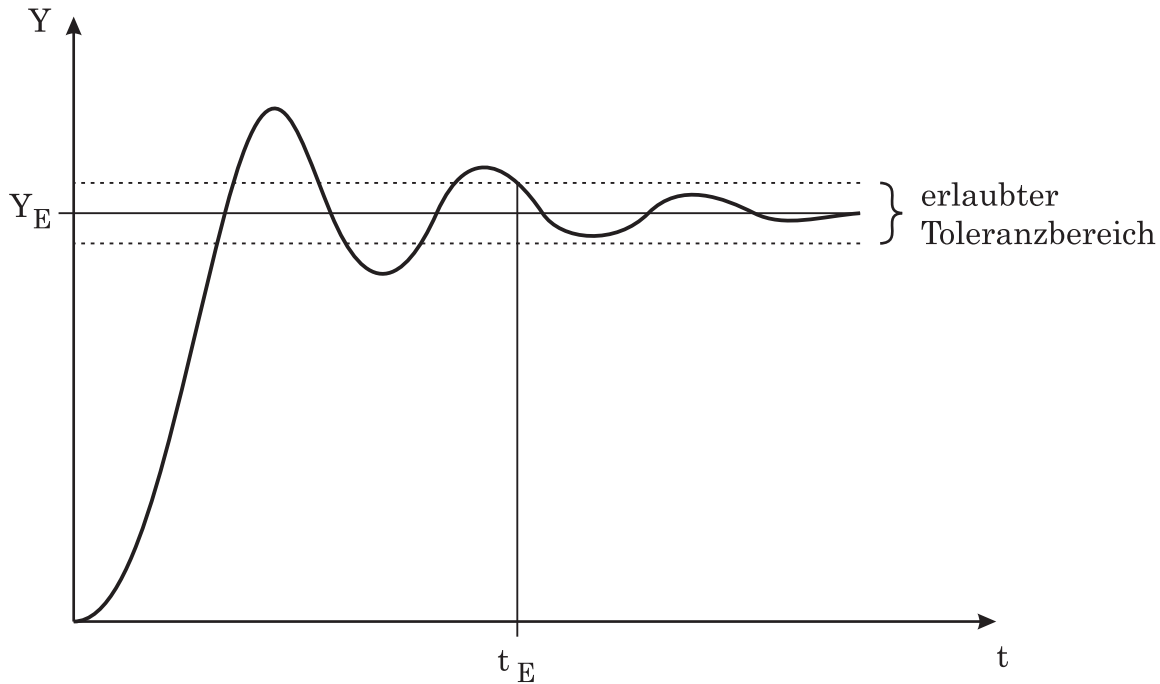


Abbildung 3.6: Einschwingzeit eines Systems

ist das System zu sehen. Dem Messsystem ist ein Kompensationssystem zur Verringerung der Einschwingzeit nachgeschaltet.

Der Frequenzgang des Messsystems entspricht einem Tiefpass erster Ordnung:

$$G_M(j\omega) = \frac{u_a(j\omega)}{u_e(j\omega)} = \frac{k}{1 + j\omega T} \quad (3.7)$$

Der Frequenzgang des Korrekturgliedes ergibt sich, indem man den Spannungsteiler berechnet:

$$\begin{aligned} G_K(j\omega) &= \frac{u_{a,k}(j\omega)}{u_a(j\omega)} = \frac{R_2}{\left(R_1 \parallel \frac{1}{j\omega C}\right) + R_2} \\ &= a \frac{1 + j\omega R_1 C}{1 + a \cdot j\omega R_1 C} = a \frac{1 + j\omega T_K}{1 + a \cdot j\omega T_K} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Hierbei sind

$$T_K = R_1 C \quad (3.9)$$

und

$$a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.10)$$

Damit wird der Frequenzgang des Gesamtsystems:

$$G_{Ges}(j\omega) = G_M(j\omega) \cdot G_K(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} \cdot a \frac{1 + j\omega T_K}{1 + a \cdot j\omega T_K} \quad (3.11)$$

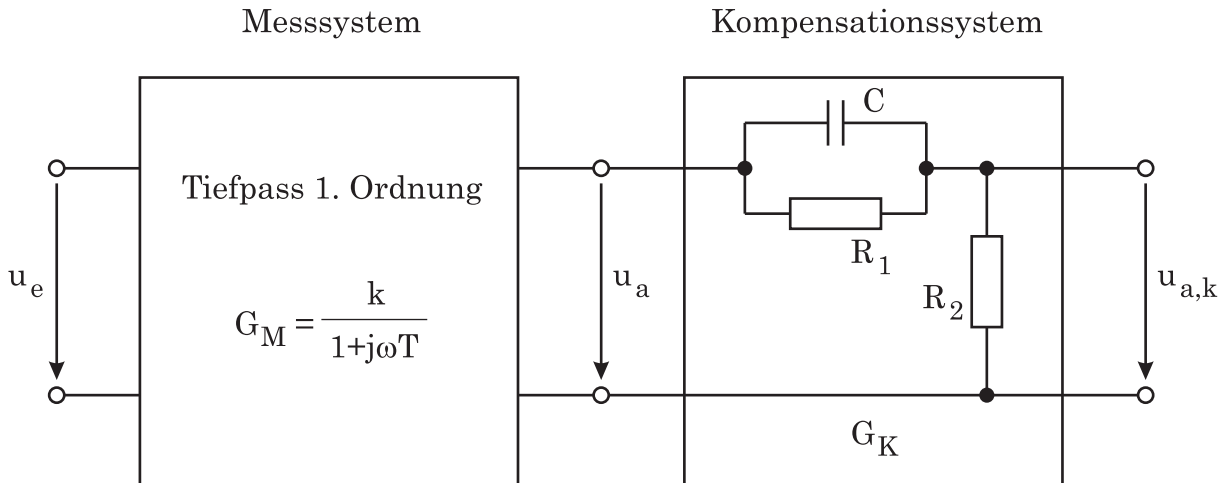


Abbildung 3.7: Messsystem mit Block zur Reduzierung der Einschwingzeit

Wählt man die beiden Zeitkonstanten gleich groß ( $T = T_K$ ), so wird

$$G_{Ges}(j\omega) = \frac{ak}{1 + a \cdot j\omega T} \quad (3.12)$$

Dies ist wieder die Gleichung eines Tiefpasses erster Ordnung. Der Verstärkungsfaktor für Gleichspannung ist  $ak$  und die neue Zeitkonstante  $T_{Ges} = aT$ . Der Faktor  $a$  ist kleiner als 1. Aus diesem Grund reduziert sich die Verstärkung und es erhöht sich die Grenzfrequenz im Vergleich zum unkompensierten Messsystem gemäß (3.7).

$$\omega_{G,Ges} = \frac{\omega_G}{a} \quad (3.13)$$

In Abbildung 3.8 sind die Amplitudengänge des unkompensierten und des kompensierten Messsystems gegenüber gestellt. Hierbei ist als Verstärkung des unkompensierten Messsystems 100 und als Faktor  $a = 0,1$  gewählt. Man sieht, dass durch die Kompensation die Verstärkung um den Faktor 10 fällt, dafür die Grenzfrequenz um den Faktor 10 höher wird.

In Abbildung 3.9 ist das Zeitverhalten des unkompensierten und kompensierten Systems gegenübergestellt. Auch hier sieht man wieder die um den Faktor 10 geringere Ausgangsamplitude, dafür schwingt das System um den Faktor 10 schneller ein.

In der Praxis muss man darauf achten, dass die Kompensation über die Lebensdauer des Systems stabil ist, ansonsten erhält man einen unerwünschten Frequenzgang.

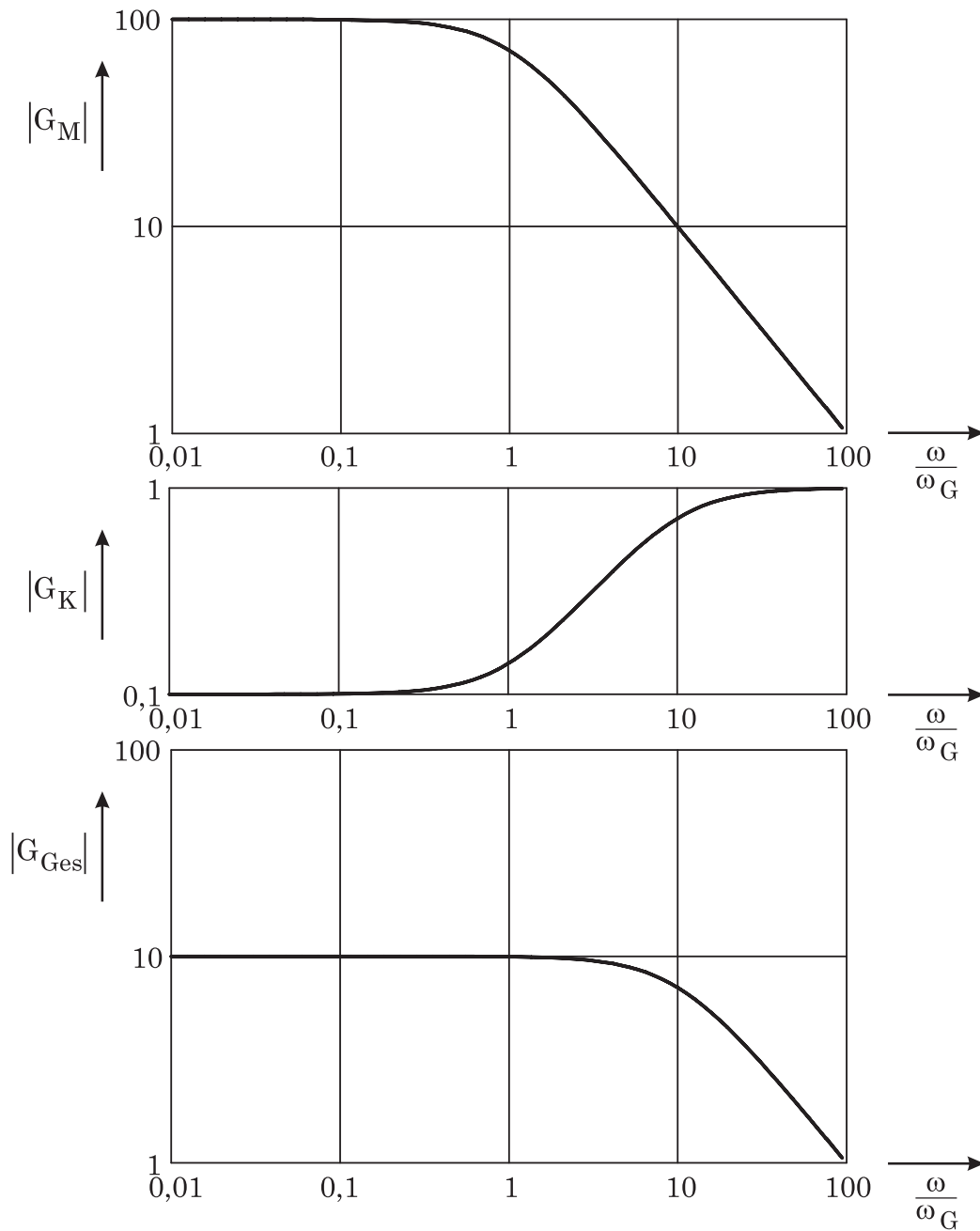


Abbildung 3.8: Frequenzgang mit und ohne Frequenzkompensation

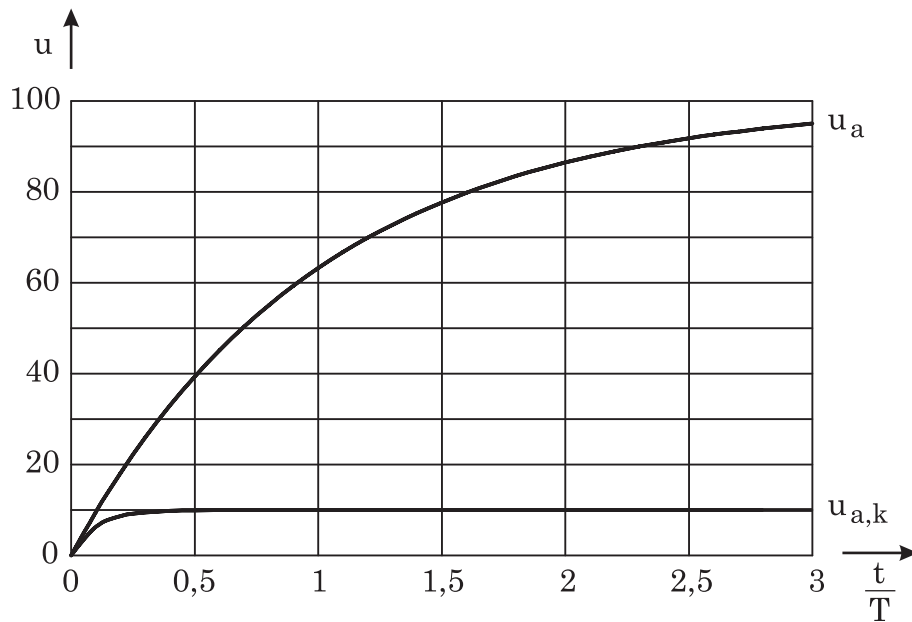


Abbildung 3.9: Zeitfunktion mit und ohne Frequenzkompensation

### 3.2.3 Inverse Filterung zur Korrektur dynamischer Fehler

Ist die Übertragungsfunktion des Messsystems bekannt, so kann mittels inverser Filterung ein „idealer“ Frequenzgang rekonstruiert werden.

$$Y_{Ein}(j\omega) = Y_{Aus}(j\omega) \cdot \frac{1}{G_M(j\omega)} \quad (3.14)$$

$G_M(j\omega)$  ... Bekannte Übertragungsfunktion des Messsystems (mit ihr wird die inverse Filterung durchgeführt)

$Y_{Aus}(j\omega)$  ... Gemessenes Ausgangssignal des Messsystems

$Y_{Ein}(j\omega)$  ... Verlauf des Eingangssignal am Messsystem (rekonstruiert)

#### Verfahren zur inversen Filterung

- Analoge Filterung mit angepasstem Filter
- Digitale Filterung im Zeitbereich mit der inversen Übertragungsfunktion
- Multiplikation mit der inversen Übertragungsfunktion im Frequenzbereich gemäß (3.14)

Bei der Bildung der reziproken Übertragungsfunktion kann es zur Division durch Null kommen. In diesem Fall ist eine inverse Filterung nicht oder nur eingeschränkt

möglich.

Die Technik der inversen Filterung wird z.B. in Bildverarbeitungssystemen eingesetzt, um die Qualität der Aufnahmen zu verbessern.

Diese Eigenschaften der inversen Filterung sind sehr gut, jedoch hat das Verfahren auch seine Grenzen:

- In dem Frequenzbereich, in dem das Filter das Nutzsignal verstärkt, werden auch Störungen und Rauschen verstärkt.
- Ist der Frequenzgang des inversen Filters oder des Messsystems nicht stabil, so wird der Frequenzgang des korrigierten Systems verfälscht.

# 4 Multimeter

## 4.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden die grundsätzlichen Messverfahren für Strom und Spannung betrachtet. Mit diesen Messgeräten erhält man nicht den Verlauf der elektrischen Größe, sondern nur den Wert (Effektivwert oder Gleichrichtwert).

## 4.2 Analoge Messwerke

Analoge Messgeräte waren bis vor einigen Jahren die einzige Möglichkeit, elektrische Größen zu messen. Mit dem Siegeszug der Digitaltechnik sind sie heute fast vollständig von digitalen Messgeräten verdrängt. Nur noch für Spezialanwendungen werden Analogmessgeräte benutzt.

Die Messung geschieht hier aufgrund eines physikalischen Effektes, der direkt in die Bewegung eines Zeigers umgewandelt wird.

### 4.2.1 Drehspulmesswerk

Das am häufigsten verwendete analoge Messwerk ist das Drehspulmesswerk.

In Abbildung 4.1 ist das Schema eines Drehspulinstrumentes gezeigt, das aus folgenden Komponenten besteht:

- **Spule:** Durch die Spule fließt der zu messende Strom. Die Spule befindet sich in einem Magnetfeld, wodurch aufgrund des Stroms eine Kraft (Lorentzkraft) auf die Spule ausgeübt wird.
- **Dauermagnet:** Der Dauermagnet erzeugt ein konstantes Magnetfeld, in dem sich die Spule befindet.
- **Flussleitstück:** Durch das Flussleitstück im Innern der Spule wird der Luftspalt des Magnetkreises verringert und dadurch die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  in der Spule erhöht. Zudem wird das Feld durch das Flussleitstück homogener.
- **Zeiger und Anzeige:** Durch Zeiger und Anzeige wird der Messwert dargestellt.



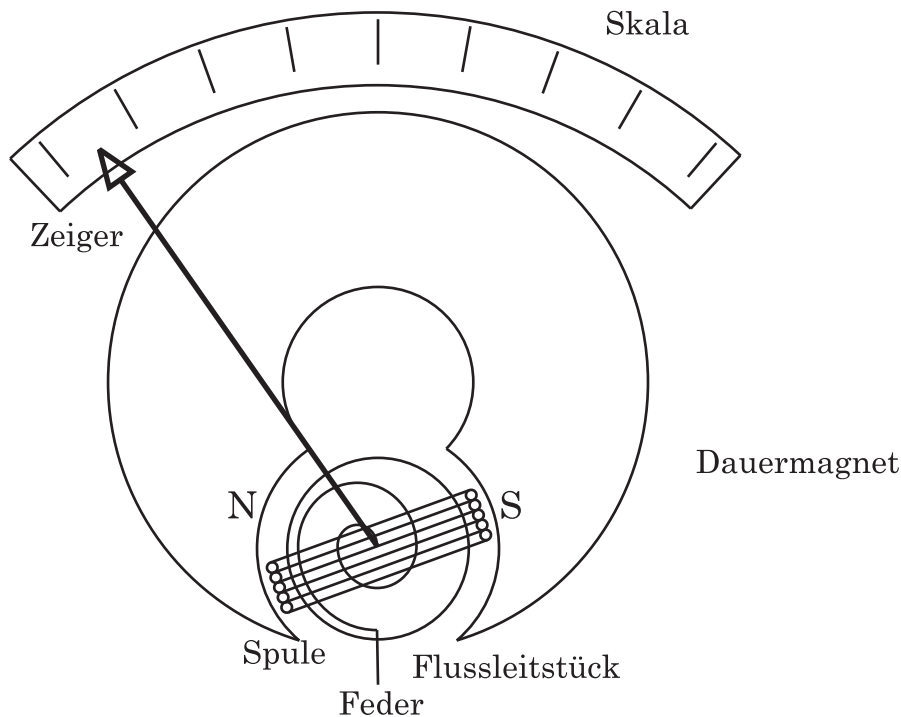


Abbildung 4.1: Drehspulmesswerk

- **Feder:** Die Feder übt eine Gegenkraft zur Lorentzkraft auf die Spule aus.
- **Lagerung:** Die Lagerung (in der Grafik nicht dargestellt) hält die Spule. Diese muss für eine genaue Messung möglichst reibungsfrei ausgeführt sein.
- **Dämpfung:** Aufgrund eines Dämpfungselements (in der Grafik nicht dargestellt) schwingt das System auf einen Endwert ein.

In Abbildung 4.2 ist ein Ausschnitt des Drehspulmesswerkes dargestellt. Man sieht, dass sich die Spule zwischen Dauermagnet und Flussleitstück in einem nahezu homogenen Magnetfeld befindet. Die Feldlinien verlaufen praktisch senkrecht zur Bewegungsrichtung der Spulenwicklung.

Die Kraft auf die Spule und damit der Ausschlag des Drehspulinstruments kann man wie folgt herleiten:

Für die Lorentzkraft auf einen Leiter in einem Magnetfeld gilt:

$$\vec{F}_L = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (4.1)$$

Hierbei ist  $Q$  die Ladung, die mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in dem Magnetfeld mit der Flussdichte  $\vec{B}$  bewegt wird.

Gilt  $\vec{v} \perp \vec{B}$  und betrachtet man nur die Beträge der Größen, so wird (4.1) zu

$$F_L = Q \cdot v \cdot B \quad (4.2)$$

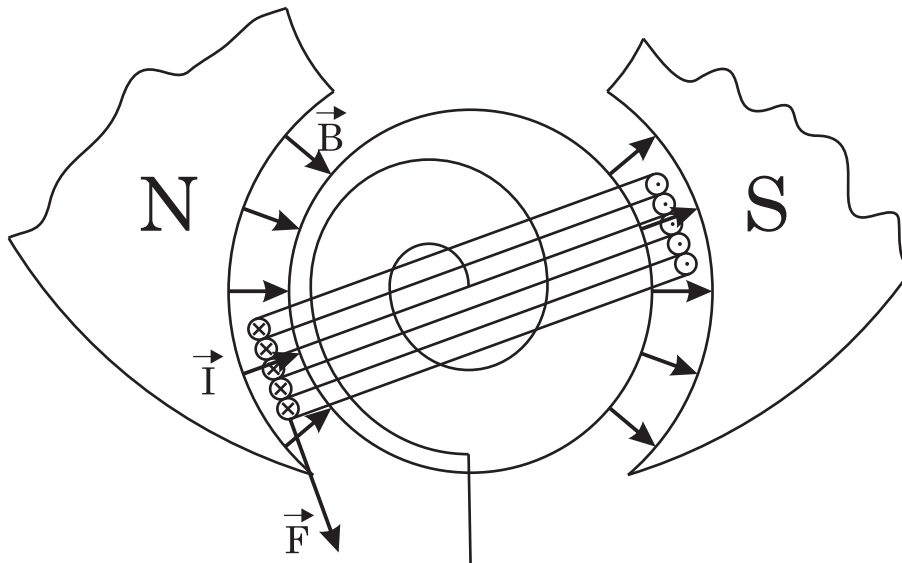


Abbildung 4.2: Schema eines Drehspulmesswerks

Nun wird die Ladung  $Q$  in einem Leiter betrachtet, für die gilt:

$$Q = A \cdot e \cdot \rho \cdot l \quad (4.3)$$

$A$ ... Leiterquerschnitt

$e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$ ... Elementarladung

$\rho$ ... Dichte der Ladungsträger im Leitermaterial

$l$ ... Länge des Leiters im Magnetfeld

Setzt man (4.3) in (4.2) ein, so kann man die Lorentzkraft mit

$$F_L = A \cdot e \cdot \rho \cdot l \cdot v \cdot B \quad (4.4)$$

beschreiben.

Betrachtet wird nun die Definition des elektrischen Stroms

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (4.5)$$

Hierbei ist  $\Delta Q$  die Ladung, die in einem Zeitraum  $\Delta t$  um ein Volumenstück  $\Delta l$  weiter wandert. Wendet man diesen Zusammenhang auf (4.3) an, so ergibt sich

$$\Delta Q = A \cdot e \cdot \rho \cdot \Delta l = A \cdot e \cdot \rho \cdot v \cdot \Delta t \quad (4.6)$$

Zusammen mit (4.5) ergibt sich so für den Strom

$$I = A \cdot e \cdot \rho \cdot v \quad (4.7)$$

Für die Lorentzkraft auf einen Leiter ergibt sich aus (4.7) durch Einsetzen in (4.4)

$$\boxed{F_L = I \cdot l \cdot B} \quad (4.8)$$

Betrachtet man nun die Spule des Drehspulinstruments (Abbildung 4.2), so hat sie die Windungszahl  $N$  und eine geometrische Länge  $l_{Sp}$  im Magnetfeld. Auf beiden Seiten der Spule wirkt eine identische Kraft

$$F_{Sp} = 2 \cdot I \cdot B \cdot l_{Sp} \cdot N \quad (4.9)$$

In der eingeschwungenen Stellung des Drehspulinstruments kompensieren sich die Drehmomente durch die Lorentzkraft und die Spulenfeder, so dass das resultierende Drehmoment gleich 0 ist:

$$M_{Sp} = M_F \quad (4.10)$$

Mit der Gleichung für das Federdrehmoment  $M_F = k \cdot \Theta$  folgt für das Gleichgewicht der Drehmomente

$$F_{Sp} \cdot r = k \cdot \Theta \quad (4.11)$$

mit  $r$  als Spulenradius,  $k$  als Federkonstante der Spiralfeder und  $\Theta$  als Winkel der Federauslenkung von ihrem Nullpunkt.

Setzt man nun den Ausdruck für die Lorentzkraft auf die Spule gemäß (4.9) in (4.11) ein und löst nach dem Drehwinkel  $\Theta$  auf, so ergibt sich für den Zeigerwinkel:

$$\Theta = \frac{1}{k} \cdot F_{Sp} \cdot r \quad (4.12)$$

$$\Theta = \frac{1}{k} \cdot I \cdot B \cdot N \cdot \underbrace{l_{Sp} \cdot 2 \cdot r}_A \quad (4.13)$$

$$\boxed{\Theta = \frac{I \cdot B \cdot N \cdot A}{k}} \quad (4.14)$$

(4.14) beschreibt damit den Ausschlagwinkel des Drehspulinstruments.

### Stromempfindlichkeit

Nun ist es interessant zu wissen, wie stark sich der Zeigerwinkel  $\Theta$  bei einer gewissen Stromänderung ändert. Dazu leitet man (4.14) nach dem Strom  $I$  ab und es folgt:

$$\boxed{\frac{\partial \Theta}{\partial I} = \frac{B \cdot N \cdot A}{k}} \quad (4.15)$$

### Spannungsempfindlichkeit

Für die Spannungsempfindlichkeit benötigt man den Innenwiderstand  $R_{Sp}$  der Spule des Drehspulinstrumentes

$$I = \frac{U}{R_{Sp}} \quad (4.16)$$

Setzt man diesen in (4.14) ein, so folgt für den Drehwinkel in Abhängigkeit der Spannung

$$\Theta = \frac{U \cdot B \cdot N \cdot A}{R_{Sp} \cdot k} \quad (4.17)$$

Leitet man (4.17) nach der Spannung ab, so folgt für die Spannungsempfindlichkeit

$$\frac{\partial \Theta}{\partial U} = \frac{B \cdot N \cdot A}{R_{Sp} \cdot k} \quad (4.18)$$

### 4.2.2 Dreheisenmesswerk

Zur Messung von Effektivwerten mit Analogmesswerken werden bevorzugt Dreheisenmesswerke benutzt.

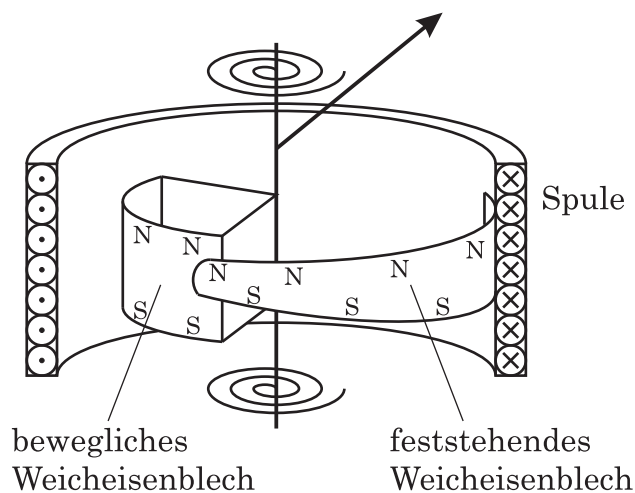


Abbildung 4.3: Dreheisenmesswerk

In Abbildung 4.3 ist ein Dreheisenmesswerk schematisch dargestellt. Es besteht aus folgenden wesentlichen Teilen:

- **Spule:** Die Spule wird von dem zu messenden Strom durchflossen und erzeugt im Innenraum ein Magnetfeld.

- **Feststehendes Weicheisenblech:** Das feststehende Weicheisenblech ist fest mit der Spule verbunden und wird durch das Magnetfeld der Spule magnetisiert.
- **Bewegliches Weicheisenblech:** Das bewegliche Weicheisenblech ist mit der drehbaren Achse verbunden und wird ebenfalls durch das Magnetfeld der Spule magnetisiert.
- **Feder und Dämpfung:** Die Feder und die Dämpfung sorgen für ein Einschwingen des Messgerätes auf einen definierten Wert.
- **Lagerung:** Die Lagerung soll möglichst präzise und reibungsarm ausgeführt werden.
- **Anzeige:** Die Anzeige besteht aus einem Zeiger und einer Skala. Mit deren Hilfe kann man den Messwert ablesen.

Aufgrund des Spulenstroms wird im Innern ein Magnetfeld erzeugt. Dieses magnetisiert die beiden Eisenplättchen gleichsinnig, die sich dann abstoßen. Diese Abstoßungskraft erzeugt ein Drehmoment proportional zum Quadrat des Stromes, das eine Drehung der Achse erzeugt. Die Feder bewirkt ein Drehmoment in entgegengesetzter Richtung. Sind die beiden Drehmomente gleich groß, so ist das Gerät im stationären Zustand und der Messwert kann abgelesen werden.

Da das Drehmoment proportional zum Quadrat des Stromes ist, ergibt sich eine stark nichtlineare Skala, die meist unerwünscht ist. Aus diesem Grund werden die Weicheisenplättchen so geformt, dass die quadratische Abhängigkeit näherungsweise ausgeglichen wird.

Für den Ausschlag des Dreheiseninstrumentes gilt (4.19). Der Winkel ist proportional zum Quadrat des Stromes  $I^2$ , eine vom Winkel abhängige Funktion  $k(\Theta)$  bewirkt die Linearisierung der Skala.

$$\boxed{\Theta = k(\Theta) \cdot I^2} \quad (4.19)$$

Bei einer Wechselgröße kann man aufgrund der quadratischen Beziehung für den Strom in (4.19) den Effektivwert direkt messen.

### 4.2.3 Elektrodynamisches Messwerk

Verändert man das Drehspulmesswerk so, dass anstelle des Permanentmagneten eine Spule das Magnetfeld erzeugt, so entsteht das Elektrodynamische Messwerk (Abbildung 4.4).

Die magnetische Flussdichte ist proportional zum Strom durch Spule 1

$$B = k_1 \cdot I_1 \quad (4.20)$$

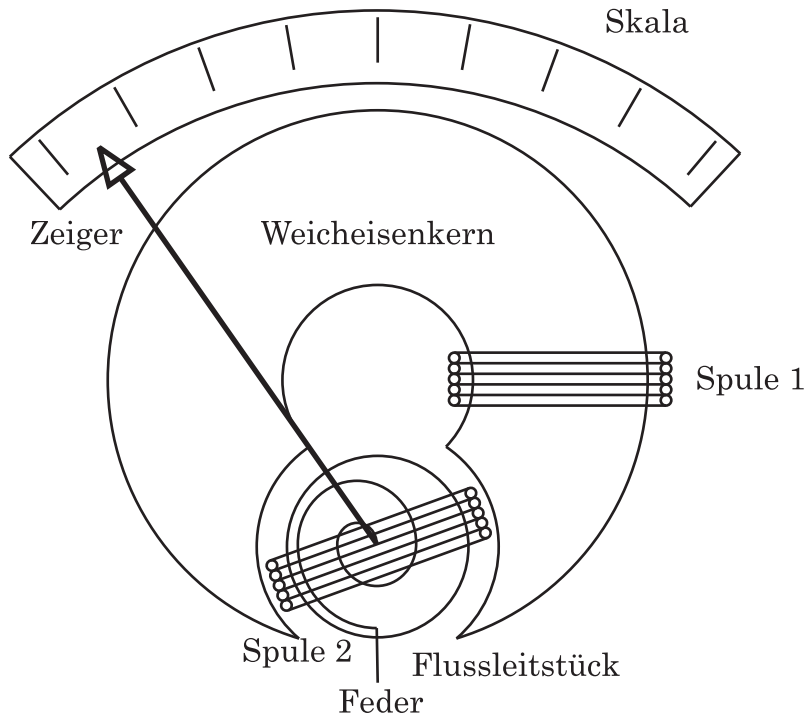


Abbildung 4.4: Elektrodynamisches Messwerk

Damit wird (4.14) aus dem Kapitel über das Drehspulmesswerk zu

$$\Theta = \frac{I_2 \cdot k_1 \cdot I_1 \cdot N \cdot A}{k} \quad (4.21)$$

Somit kann man das Produkt aus den Strömen  $I_1$  und  $I_2$  messen. Diese Messanwendung kommt sehr selten vor, viel häufiger möchte man das Produkt aus einem Strom und der dazu gehörenden Spannung messen.

Ersetzt man den Strom  $I_2$  durch die Spannung  $U_1$  unter Berücksichtigung des Innenwiderstand des Messwerkes  $R_I$

$$I_2 = \frac{U_1}{R_I} \quad (4.22)$$

so wird aus (4.21)

$$\Theta = \frac{U_1 \cdot k_1 \cdot I_1 \cdot N \cdot A}{R_I \cdot k} \quad (4.23)$$

Bei (4.21) und (4.23) darf man nicht vergessen, dass die Größen  $I_1$ ,  $I_2$  und  $U_1$  Momentanwerte darstellen.

### Gleichleistungsmessung

Bei der Messung von Gleichgrößen sieht man direkt aus (4.23), dass der Zeigeraus-  
schlag proportional dem Produkt aus Strom und Spannung ist. Damit zeigt das  
elektrodynamische Messwerk direkt die Leistung an.

### Wechselleistungsmessung

In (4.23) sind die Momentanwerte von  $I_1$  und  $U_1$  vorhanden. Aufgrund der Masse  
des Messwerkes besitzt das Messgerät eine gewisse Trägheit und so wird nicht der  
Augenblickswert, sondern der Wert über einen gewissen Zeitraum  $\bar{\Theta}$  angezeigt.

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{T} \int_0^T \Theta dt \quad (4.24)$$

Setzt man (4.23) in (4.24) ein, so ergibt sich unter Annahme sinusförmiger Größen  
 $U_1$  und  $I_1$

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u_1(t) \cdot k_1 \cdot i_1(t) \cdot N \cdot A}{R_I \cdot k} dt \quad (4.25)$$

$$\bar{\Theta} = \frac{k_1 \cdot N \cdot A}{T \cdot R_I \cdot k} \int_0^T (u_1(t) \cdot i_1(t)) dt \quad (4.26)$$

$$\bar{\Theta} = \frac{k_1 \cdot N \cdot A}{T \cdot R_I \cdot k} \int_0^T (\hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{I}_1 \cdot \sin(\omega t + \Delta\varphi)) dt \quad (4.27)$$

$$\bar{\Theta} = \frac{k_1 \cdot N \cdot A}{T \cdot R_I \cdot k} \cdot \hat{U}_1 \cdot \hat{I}_1 \int_0^T (\sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t + \Delta\varphi)) dt \quad (4.28)$$

$$\bar{\Theta} = \frac{k_1 \cdot N \cdot A}{T \cdot R_I \cdot k} \cdot \hat{U}_1 \cdot \hat{I}_1 \int_0^T \left( \frac{\cos(\Delta\varphi) - \cos(2\omega t + \Delta\varphi)}{2} \right) dt \quad (4.29)$$

$$\bar{\Theta} = \frac{k_1 \cdot N \cdot A}{T \cdot R_I \cdot k} \cdot \hat{U}_1 \cdot \hat{I}_1 \left( \int_0^T \frac{\cos(\Delta\varphi)}{2} dt - \underbrace{\int_0^T \frac{\cos(2\omega t + \Delta\varphi)}{2} dt}_{=0} \right) \quad (4.30)$$

$$\bar{\Theta} = \frac{k_1 \cdot N \cdot A}{T \cdot R_I \cdot k} \cdot \hat{U}_1 \cdot \hat{I}_1 \frac{\cos(\Delta\varphi)}{2} \cdot T \quad (4.31)$$

Fasst man alle Konstanten zu einer neuen zusammen, so folgt

$$\bar{\Theta} = const. \cdot \frac{\hat{U}_1 \cdot \hat{I}_1}{2} \cdot \cos(\Delta\varphi) \quad (4.32)$$

Man sieht, dass das Elektrodynamische Messwerk den Wirkleistungsanteil misst.

#### 4.2.4 Messfehler bei analogen Messwerken

Keine Messung ist perfekt, ganz nach dem alten Spruch:

„Wer misst, misst Mist!“

Nachfolgend werden mögliche Messfehler bei analogen Messwerken qualitativ dargestellt. Im Kapitel über die Messunsicherheiten wurde bereits auf die Berechnung dieser Messfehler eingegangen.

- **Nicht perfekt gefertigtes Messwerk:** In jedem Gerät gibt es Produktionstoleranzen, auch in einem Messwerk. Je nach Aufwand in der Produktion werden diese mehr oder weniger gut durch Kalibrierung und Abgleich eliminiert. Ein gewisser Rest bleibt jedoch immer.
- **Reibung:** Obwohl der Zeiger aufwändig gelagert ist, ist doch eine gewisse Restreibung vorhanden, die zu einer Hysterese führt (nicht zu verwechseln mit der benötigten Dämpfung, die zum Einschwingen des Zeiger benötigt wird).
- **Umwelteinflüsse:** Bei sich ändernden Umgebungsbedingungen (z.B. Temperatur, Feuchte, Richtung der Schwerkraft) ändern sich auch die Eigenschaften des Messwerkes und damit der angezeigte Wert.
- **Alterung:** Durch Alterung kann sich die Flussdichte eines Permanentmagneten oder die Federkonstante geringfügig ändern. Dadurch ändert sich der angezeigte Messwert.
- **Parallaxenfehler:** Wenn man beim Ablesen nicht senkrecht auf die Skala schaut, entsteht ein Parallaxenfehler, durch den der abgelesene Messwert verfälscht wird.

#### 4.2.5 Symbole analoger Messwerke

In Tabelle 4.1 sind die Symbole analoger Messwerke dargestellt. Diese sind meist klein auf der Skala dargestellt.

### 4.3 Digitale Messwerke

Heute sind digitale Messgeräte die dominierenden Messgeräte. Sie haben einige wesentliche Vorteile gegenüber analogen Messgeräten, so z.B. bessere Kenndaten, höhere Robustheit, leichtere Verarbeitung der Messwerte,...

Aus diesem Grund haben sie die analogen Messgeräte bis auf wenige Ausnahmen verdrängt.




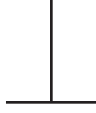








Symbol	Beschreibung	Symbol	Beschreibung
	Drehspulmesswerk		senkrechte Gebrauchslage
	Drehspulmesswerk mit Gleichrichter		waagrechte Gebrauchslage
	Dreheisenmesswerk		schräge Gebrauchslage
	Elektrodynamisches Messwerk, eisenlos		Prüfspannungszeichen, ohne Ziffer 500V, mit Ziffer Angabe in kV
	Elektrodynamisches Messwerk, eisengeschlossen		Gleich- und Wechselstrominstrument

Tabelle 4.1: Symbole analoger Messwerke

### 4.3.1 Funktionsweise

In Abbildung 4.5 ist das Blockschaltbild eines digitalen Messwerkes zu sehen, wie es bei Digitalmultimetern (DMM) verwendet wird. Es besteht aus folgenden wesentlichen Komponenten:

- **Eingangsschaltung für Spannungs- und Strommessung:** Durch ein schaltbares Widerstandsnetzwerk wird der zu messenden Spannungs- oder Strombereich auf den Eingangsspannungsbereich der nachfolgenden Schaltung angepasst. Dies wird in den nachfolgenden Kapiteln zur Spannungs- und Strommessung noch ausführlicher dargestellt.
- **Eingangsschaltung für Widerstandsmessung:** Für die Widerstandsmessung wird eine Konstantstromquelle benutzt, deren Ausgangsstrom durch den zu messenden Widerstand fließt. Die Spannung am Widerstand ist proportional zum Widerstandswert.
- **Effektivwertschaltung:** A/D-Wandler können nur Mittelwerte der Span-

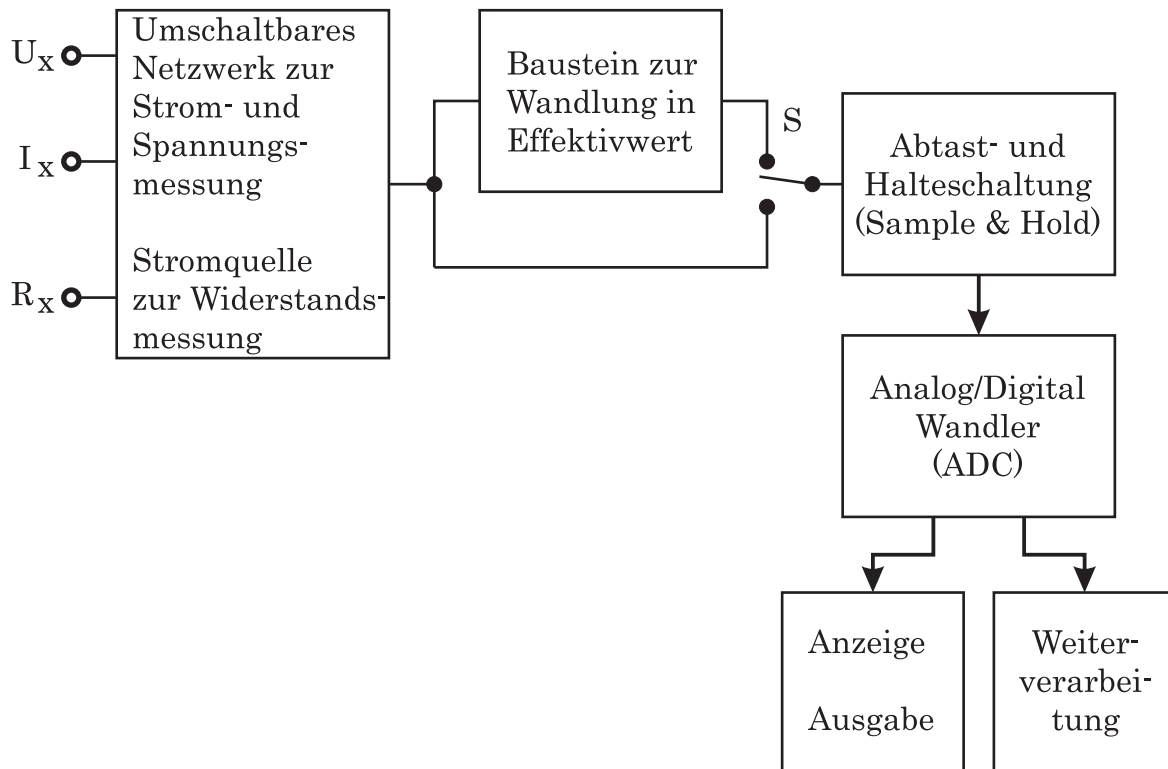


Abbildung 4.5: Blockschaltbild eines digitalen Messgerätes

nung messen. Aus diesem Grund wird eine Schaltung benötigt, um den Effektivwert in den Mittelwert zu wandeln. Dies geschieht durch die Serienschaltung eines Quadrierers, Tiefpasses und Radizierers.

- **Abtast- und Halteschaltung:** Die Abtast- und Halteschaltung (Sample & Hold) speichert kurzzeitig einen Spannungswert, so dass dieser während der Analog/Digital Wandlung konstant bleibt.
- **Analog/Digital-Wandler:** Der A/D-Wandler wandelt eine Spannung an seinem Eingang in einen dazu proportionalen Zahlenwert um. Dieser kann dann digital weiter verarbeitet und angezeigt oder auf andere Weise ausgegeben werden.

### 4.3.2 Abtast- und Halteschaltung (Sample & Hold)

Die Abtast- und Halteschaltung speichert einen Spannungswert an ihrem Ausgang lange genug, so dass der nachfolgende A/D-Wandler während der Wandlungszeit eine konstante Spannung an seinem Eingang „sieht“. Dadurch wird vermieden, dass sich die Spannung am Eingang des A/D-Wandlers während der Wandlung ändert und dadurch Messfehler entstehen.

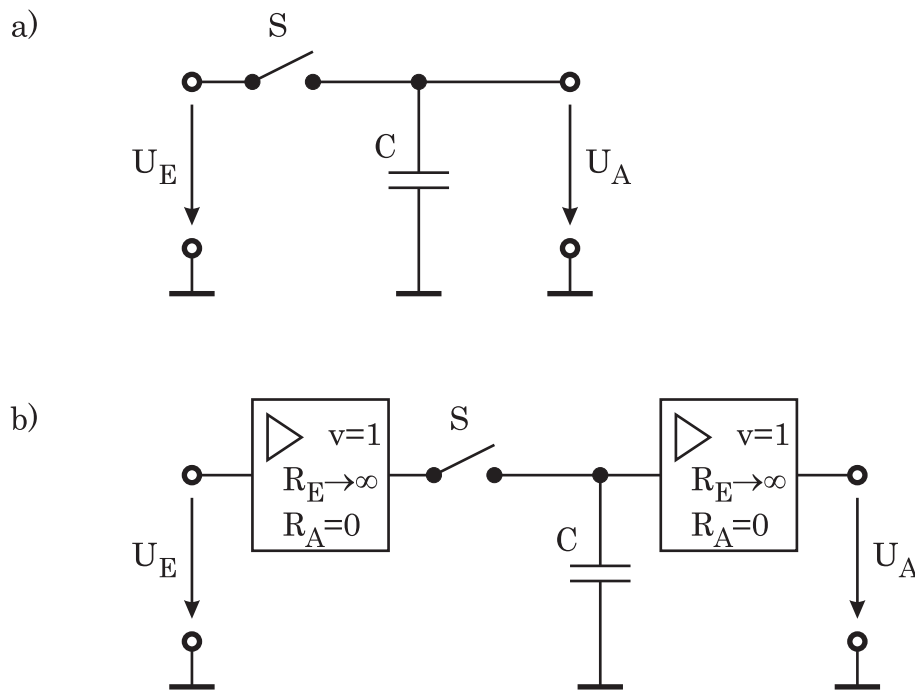


Abbildung 4.6: Schema der Abtast- und Halteschaltung

In Abbildung 4.6a) ist die einfachste S&H-Schaltung zu sehen. Sie besteht aus einem Schalter  $S$ , der während der „transparenten Zeit“ eingeschaltet ist, so dass  $U_E = U_A = U_C$  ist. Wird der Schalter geöffnet, so wird die Ausgangsspannung gleich der Spannung am Kondensator  $U_A = U_C$ . Diese Schaltung hat einen entscheidenden Nachteil, da aufgrund des Ausgangsstroms der Kondensator entladen wird und im Laufe der Zeit die Spannung am Kondensator absinkt. Zudem stellt der Kondensator eine Last für die Eingangsspannung  $U_E$  dar und kann diese verfälschen.

Aus diesem Grund kann die S&H-Schaltung dahingehend modifiziert werden, dass die beiden oben genannten Nachteile entfallen (Abbildung 4.6b). Ein Verstärker vor dem Schalter entkoppelt die Eingangsspannung vom Kondensator, so dass sich keine Belastung von  $U_E$  ergibt. Ein zweiter Verstärker nach dem Kondensator entkoppelt die Kondensatorspannung von  $U_A$ , so dass kein Strom vom Kondensator zum Ausgang fließt. Mit diesen Maßnahmen kann die Spannungsänderung während der Haltezeit minimiert werden.

### 4.3.3 A/D-Wandler

#### 4.3.3.1 Funktionsweise

Der Analog/Digital-Wandler (A/D-Wandler) wandelt eine Spannung an seinem Eingang in einen Zahlenwert an seinem Ausgang.

Die Spannung wird so von einem analogen (amplitudenkontinuierlichen) Signal in ein digitales (amplitudendiskretes) Signal gewandelt (siehe Abbildung 4.7). !

Der A/D-Wandler tastet das analoge Signal nur zu bestimmten Zeiten ab. So wird aus dem zeitkontinuierlichen Signal ein zeitdiskretes Signal. !

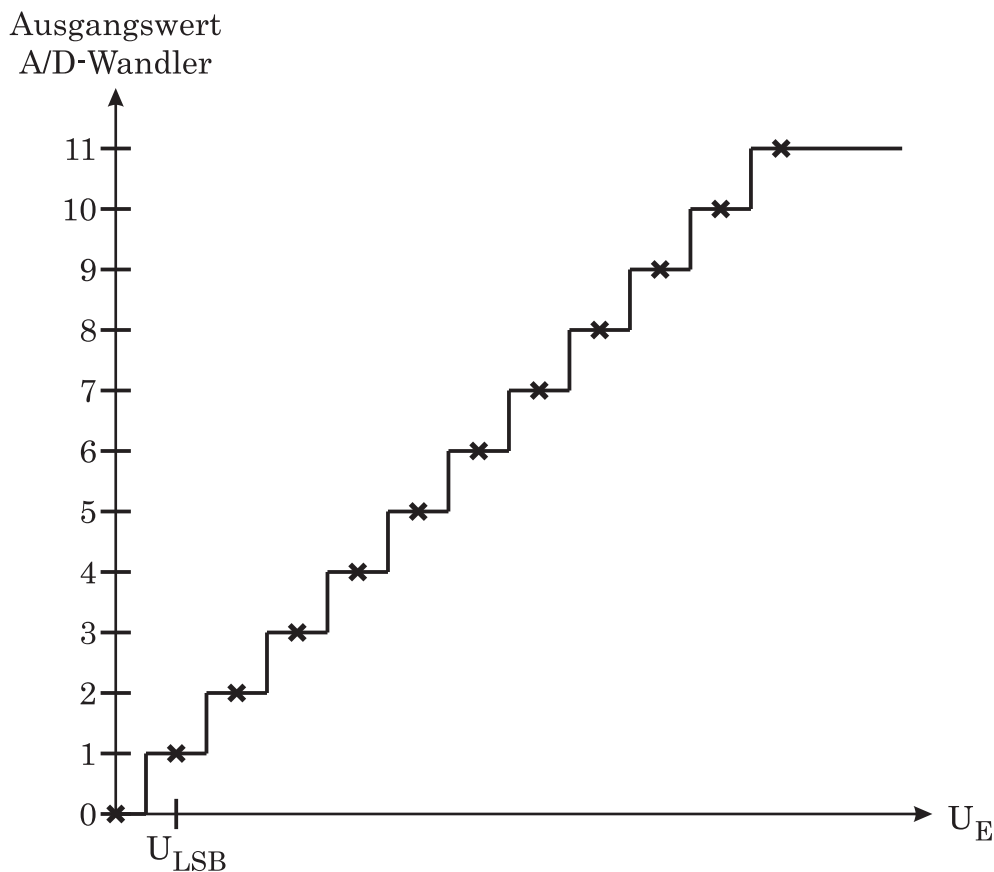


Abbildung 4.7: Übertragungsfunktion eines A/D-Wandlers

Ein A/D-Wandler wird durch folgende wesentlichen Kenngrößen charakterisiert:

- **Eingangsspannungsbereich:** Die minimale Spannung am Eingang ist  $U_{Min}$  und die maximale Spannung am Eingang ist  $U_{Max}$ . Je nach Wandlertyp ist der Eingangsspannungsbereich bipolar oder unipolar.
- **Spannungsauflösung:** Die Spannungsauflösung ist von der Anzahl der Bits  $n$  und dem Eingangsspannungsbereich abhängig.

$$\Delta U_E = \frac{U_{Max} - U_{Min}}{2^n} \quad (4.33)$$

- **Quantisierungsfehler:** Der Quantisierungsfehler beträgt  $\pm 0,5 \cdot \Delta U_E$ .
- **Wandlungszeit:** Die benötigte Wandlungszeit hängt von der Anwendung ab. Bei einem Oszilloskop werden deutlich höhere Anforderungen an die Wandlungszeit gestellt als bei einem Digitalmultimeter. Die Wandlungszeit setzt sich aus der Einschwingzeit des Abtast- und Haltegliedes und der eigentlichen Wandlung zusammen.  
Die Wandlungszeit des A/D-Wandlers ist stark von der Technologie abhängig.

#### 4.3.3.2 Parallel A/D-Wandler

In Abbildung 4.8 ist der schematische Schaltplan eines solchen A/D-Wandlers mit einer Breite von  $n = 3$  Bits zu sehen.

Der Wandlungsvorgang erfolgt nach folgendem Prinzip:

- Für  $n$  Bits sind  $(2^n - 1)$  Komparatoren erforderlich.
- An jedem der Komparatoren liegt am positiven Eingang die Eingangsspannung  $U_E$  an.
- Mit einem Widerstandsnetzwerk werden  $(2^n - 1)$  Vergleichsspannungen aus einer Referenzspannung  $U_{Ref}$  erzeugt. Diese Spannungen werden an den negativen Eingängen der Komparatoren angelegt.
- Ist die Eingangsspannung größer als die Referenzspannung, dann ist der Ausgang des Komparators gleich 1.
- Der Ausgangscode der Komparatoren wird in einem Netzwerk zu einer Binärzahl gewandelt und ausgegeben.

Beim Parallelwandler oder Flashwandler wird das digitale Wort parallel innerhalb **eines** Taktzyklusses aus der analogen Spannung erzeugt. Die maximale Taktfrequenz wird durch Einschwingvorgänge innerhalb des Wandlers wie z.B. parasitäre Kapazitäten im Widerstandsnetzwerk und den Komparatoren bestimmt.

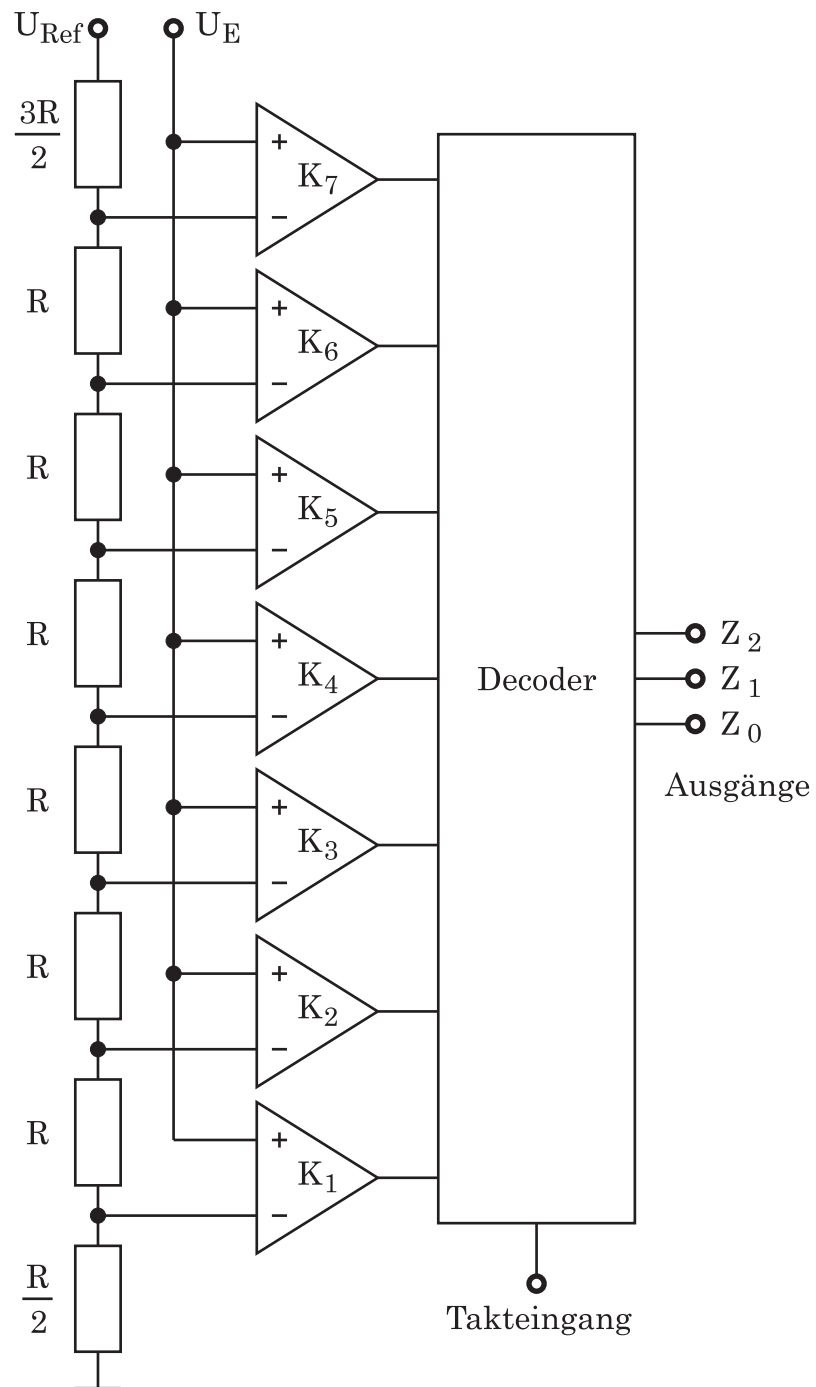


Abbildung 4.8: Schaltbild eines Parallel A/D-Wandlers

Man sieht, dass für eine hohe Anzahl von Bits (entsprechend einer hohen Spannungsaufösung) eine exponentiell ansteigende Zahl von Komparatoren benötigt und damit der Aufwand immens wird.

Parallelwandler werden vor allem dort eingesetzt, wo es auf höchste Geschwindigkeit ankommt, bei der Spannungsaufösung dafür Kompromisse möglich sind (z.B. bei Oszilloskopen). Diese A/D-Wandler besitzen oft Auflösungen von  $n = 6 \dots 8$  Bits.

#### 4.3.3.3 Sukzessive Approximation

Das Verfahren der sukzessiven Approximation ist schematisch in Abbildung 4.9 dargestellt.

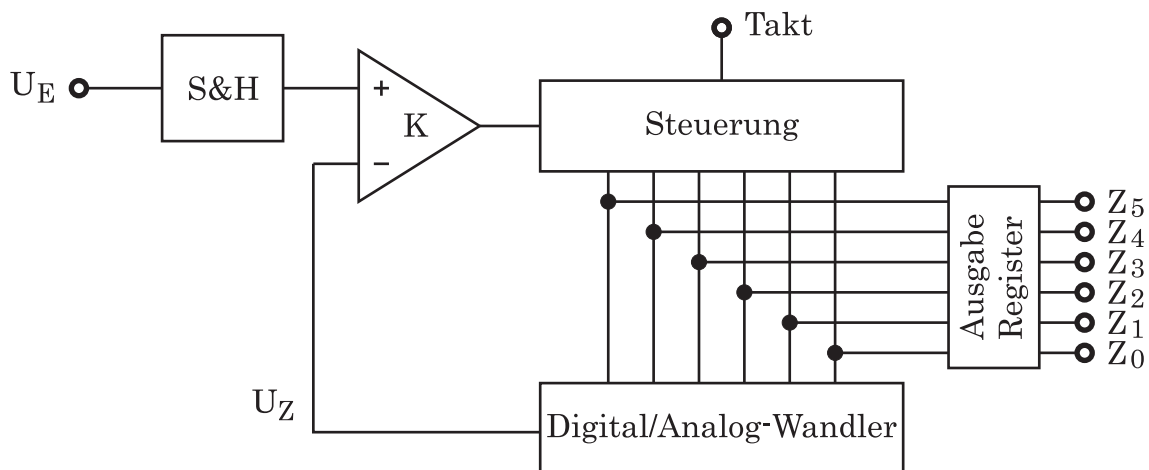


Abbildung 4.9: Blockschaltbild eines A/D-Wandlers mit Sukzessiver Approximation

Die A/D-Wandlung geschieht nach folgendem Verfahren:

- Das höchstwertige Bit des Digital/Analog-Wandlers wird gesetzt.
- Der D/A-Wandler gibt eine entsprechende Spannung  $U_Z$  an den negativen Eingang des Komparators.
- Mit dem Komparator wird  $U_E$  und  $U_Z$  verglichen. Mit dem Ausgang des Komparators wird das höchstwertige Bit gesetzt.
- Das nächstniederwertige Bit des D/A-Wandlers wird gesetzt.

- Der D/A-Wandler gibt eine entsprechende Spannung  $U_Z$  an den negativen Eingang des Komparators.
- Mit dem Komparator wird  $U_E$  und  $U_Z$  verglichen. Mit dem Ausgang des Komparators wird das nächstniederwertige Bit gesetzt.
- ...
- Dieses Verfahren wird für alle Bits wiederholt.

Der digitale Wert wird schrittweise angenähert – daher die Bezeichnung sukzessive Approximation.

Für  $n$  Bits werden  $n$  Taktzyklen zur Erzeugung des digitalen Wertes benötigt. Der Schaltungsaufwand ist bei gleicher Auflösung deutlich geringer als bei einem Parallelwandler, dafür dauert die Wandlung  $n$  mal so lange.

#### 4.3.3.4 Single-Slope Wandler

In Abbildung 4.10 ist das „Single-Slope Verfahren“ Wandlungsverfahren dargestellt, das zu den integrierenden Wandlungsverfahren gehört.

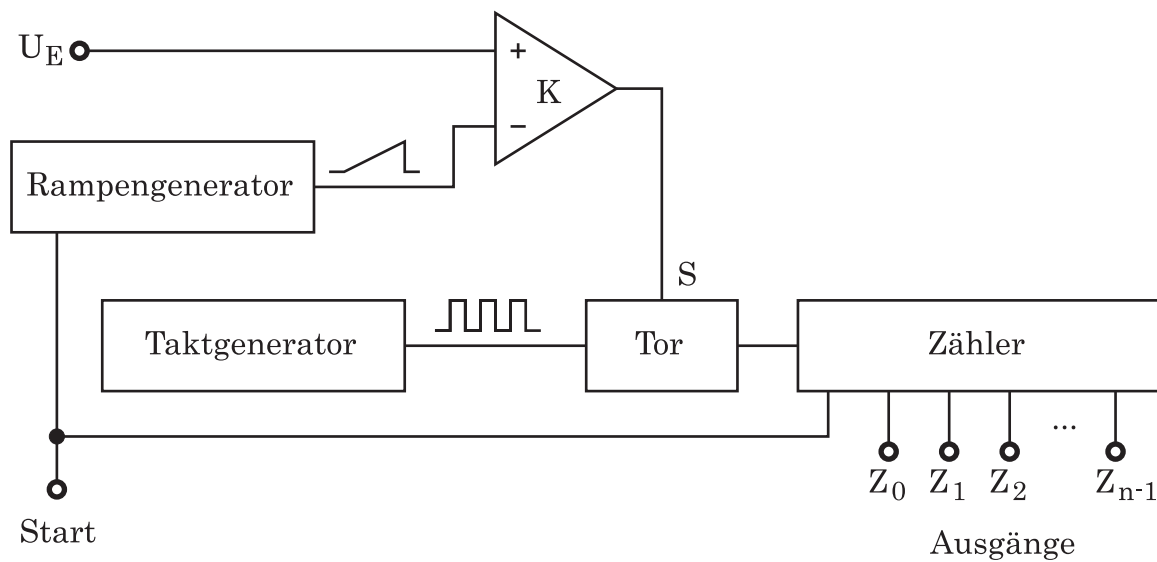


Abbildung 4.10: Blockschaltbild eines Single-Slope A/D-Wandlers

Es funktioniert auf folgende Weise:



- Mit einem Startimpuls wird der Zähler zurückgesetzt und der Rampengenerator gestartet.
- Der Rampengenerator erzeugt eine linear ansteigende Spannung, die an den negativen Eingang des Komparators gelegt wird.
- Am positiven Eingang des Komparators ist die Eingangsspannung  $U_E$ .
- Solange die Eingangsspannung größer ist als die Spannung des Rampengenerators, ist der Ausgang des Komparators logisch „1“.
- Solange der Ausgang des Komparators logisch „1“ ist, wird ein Tor durchgeschaltet und Taktimpulse gelangen vom Taktgenerator an den Eingang des Zählers.
- Der Zähler zählt die Taktimpulse und gibt die Binärzahl aus.
- Ist die Rampenspannung größer als die Eingangsspannung, so wechselt der Ausgang des Komparators auf logisch „0“, das Tor wird gesperrt und der Zähler bekommt keine Impulse mehr. Der Endwert des Zählerstandes  $N$  ist erreicht und die A/D-Wandlung ist beendet.  
Es gilt folglich

$$U_E = \text{const.} \cdot N \quad (4.34)$$

Die Wandlungszeit ist abhängig von der Eingangsspannung.

Aufgrund der Abhängigkeit der Wandlungsgenauigkeit von der Taktfrequenz und der Steigung des Rampengenerators ist dieses Wandlungsverfahren ziemlich ungenau und wird in der Praxis kaum verwendet.

Die Weiterentwicklung ist das „Dual-Slope Verfahren“, das häufig eingesetzt wird.

#### 4.3.3.5 Dual-Slope Wandler

In Abbildung 4.11 ist das stark vereinfachte Blockschaltbild eines Dual-Slope Wandlers dargestellt.

Der Dual-Slope Wandler funktioniert nach folgendem Schema:

- Vor dem Start des Wandlungsvorganges werden alle Bauteile, vor allem der Integrator zurückgesetzt.
- Der Schalter wird so geschaltet, dass die Eingangsspannung  $U_E$  am Integraleingang liegt.

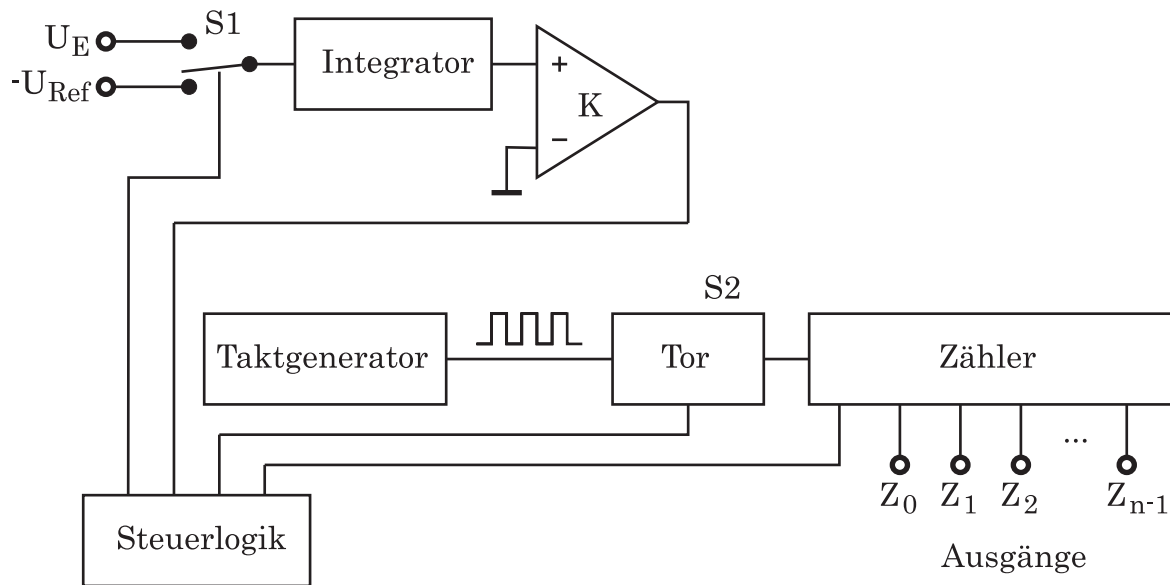


Abbildung 4.11: Blockschaltbild eines Dual-Slope A/D-Wandlers

- Der Integrator integriert eine feste Zeit lang die Spannung. Diese Zeit wird durch den Zähler gemessen (bei einem definierten Zählerstand  $N_E$  ist die Zeit abgelaufen). Am Ausgang des Integrators steigt während dieser Zeit die Spannung linear an.
- Nach dieser Zeit wird der Zähler auf 0 zurückgesetzt und der Schalter schaltet auf die Referenzspannung  $-U_{Ref}$  um.
- Nun wird durch die negative Referenzspannung wieder abintegriert, d.h. die Ausgangsspannung des Integrators sinkt bis auf 0V. Zu diesem Zeitpunkt schaltet der Komparator K um und stoppt den Integrationsvorgang.
- Der Zählerstand  $N_{Ref}$  der Abintegration wird ausgewertet und aus den beiden Zählerständen für die Aufintegration und Abintegration wird die Eingangsspannung  $U_E$  berechnet.

Die Eingangsspannung wird folgendermaßen berechnet:

Nach der Integration der Eingangsspannung beträgt die Spannung  $U_I$  am Ausgang des Integrators nach dem ersten Zeitintervall:

$$U_I = K \cdot \int_0^{N_E \cdot T} U_E \cdot dt = K \cdot U_E \cdot N_E \cdot T \quad (4.35)$$

Hierbei wird die Spannung  $U_E$  als konstant angenommen (was man durch ein S&H Element erzwingen kann).  $T$  die Zeit eines Taktes und es wird über eine Anzahl  $N_E$  von Takten integriert. Die Konstante  $K$  ist eine Konstante des Integrators.

Anschließend wird die Ausgangsspannung am Integrator wieder auf  $0V$  abintegriert.

$$U_I = K \cdot U_E \cdot N_E \cdot T + K \cdot \int_0^{N_{Ref} \cdot T} (-U_{Ref}) dt \quad (4.36)$$

$$= K \cdot U_E \cdot N_E \cdot T - K \cdot U_{Ref} \cdot N_{Ref} \cdot T = 0V \quad (4.37)$$

Aus (4.36) folgt

$$K \cdot U_E \cdot N_E \cdot T = K \cdot U_{Ref} \cdot N_{Ref} \cdot T \quad (4.38)$$

$$U_E \cdot N_E = U_{Ref} \cdot N_{Ref} \quad (4.39)$$

$$U_E = \frac{U_{Ref} \cdot N_{Ref}}{N_E} \quad (4.40)$$

Man sieht, dass die Berechnung der Eingangsspannung nur von den beiden Zählerständen der Auf- und Abintegration und der Referenzspannung abhängig ist. Die Integratorkonstante  $K$  und die Taktzeit  $T$  kürzen sich heraus. Dadurch ist die A/D-Wandlung mit diesem Verfahren sehr genau.

Die Wandlung dauert  $N_E + N_{Ref}$  Takte und ist damit sehr langsam.

#### 4.3.3.6 Delta-Sigma Wandler

Abbildung 4.12 zeigt das stark vereinfachte Schema eines Delta-Sigma A/D-Wandlers.

Die Funktionsweise ist folgendermaßen:

- Am positiven Eingang des Verstärkers  $V$  liegt die Eingangsspannung  $U_E$  an, am negativen Eingang befindet sich ein Schalter  $S$ , mit dem man zwischen der Referenzspannung  $U_{Ref}$  und Masse umschalten kann. Am Ausgang des Verstärkers liegt die Spannung

$$U_V = U_+ - U_- \quad (4.41)$$

- Die Spannung  $U_V$  liegt am Eingang des Integrators an, wodurch am Ausgang

$$U_I = \int U_V \cdot dt \quad (4.42)$$

anliegt.

- Ein nachfolgender Komparator vergleicht die Ausgangsspannung des Integrators mit Masse und liefert das Ausgangssignal an die Steuerlogik.

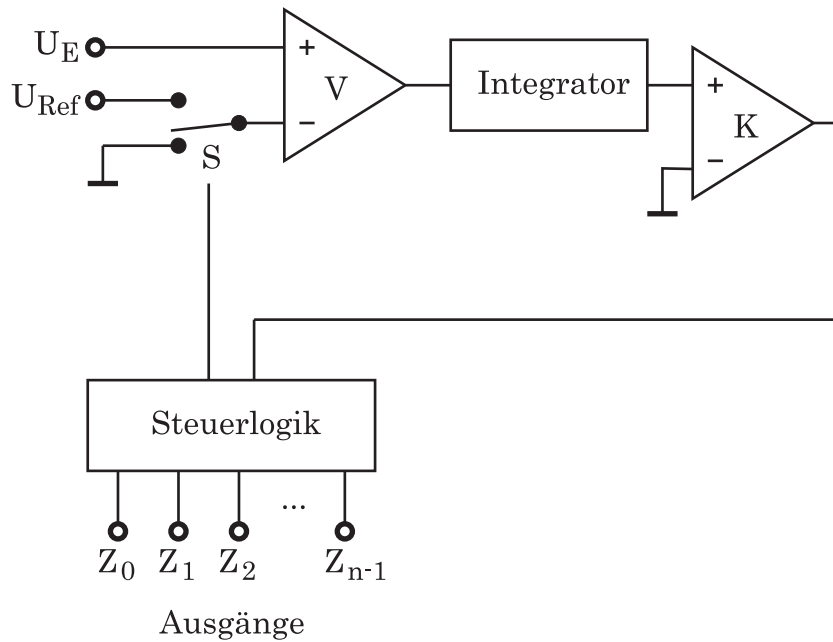


Abbildung 4.12: Blockschaltbild eines Delta-Sigma A/D-Wandlers

- Die Steuerlogik steuert den Schalter so, dass die Spannung am Ausgang des Integrators im Mittel gleich 0V ist. Ist der Ausgang des Komparators positiv, so wird der Schalter S auf  $U_{Ref}$  geschaltet und die Spannung abintegriert. Ist der Ausgang des Komparators negativ, so wird der Schalter S auf Masse geschaltet und die Spannung  $U_E$  aufintegriert.
- Die Steuerung zählt, wie lange der Schalter auf S auf Stellung  $U_{Ref}$  im Vergleich zur Gesamtzeit geschaltet war. Daraus wird der Digitalwert berechnet und ausgegeben.

Die Wandlung dauert mindestens  $2^n$  Taktzyklen für eine Auflösung von n Bits. Mit diesem Wandlerprinzip können mit relativ geringem Aufwand sehr genaue Wandler gebaut werden. Aus diesem Grund wird dieses Wandlerprinzip oft bei Digitalmultimetern eingesetzt.

#### 4.3.4 A/D-Wandlerfehler

Kein A/D-Wandler ist perfekt, es gibt die folgenden wesentlichen Fehlerquellen:

- **Quantisierungsfehler:** Aufgrund der endlichen Auflösung des digitalen Wertes entsteht eine Art „Rundungsfehler“ der analogen Spannung.
- **Offset- und Linearitätsfehler:** Der Ausgangswert ist nicht proportional zur angelegten Spannung. Ein Anteil dieses Fehlers ist der Offsetfehler, d.h.

die Spannung 0V am Eingang entspricht nicht dem Wert „0“ am Ausgang. Der zweite Teil des Fehlers ist der Linearitätsfehler, d.h. die Kennlinie ist gekrümmt.

- **Missing Codes:** Bei manchen Wandlertypen (z.B. Parallelwandlern) kann es aufgrund von Toleranzen vorkommen, dass manche Codes am Ausgang nicht auftreten.
- **Rauschen:** Wie alle elektronischen Bauteile besitzen die A/D-Wandler ein gewisses Rauschen. Dieses ist als statistischer Amplitudenfehler des Ausgangs zu sehen.
- **Einschwingzeit:** Der Wandler benötigt aufgrund der internen Kapazitäten und Induktivitäten eine gewisse Einschwingzeit. Je höher die Wandlungsrate ist, desto weniger ist der Wandler eingeschwungen und desto höher ist der Amplitudenfehler (in Datenblättern wird oft der Fehler in Abhängigkeit der Wandlerfrequenz angegeben).
- **Jitter:** Im Idealfall nimmt man an, dass die Werte zu äquidistanten Zeiten abgetastet werden. Ist in der Abtastzeit ein gewisser Fehler (eine Art von zeitlichem Rauschen), so nennt man das Jitter.

### 4.3.5 Realisierung eines Digitalmultimeters (DMM)

Es gibt zahlreiche ICs, welche die wesentlichen Funktionen eines Digitalmultimeters integrieren. Der Datenblattauszug eines Beispiel-ICs ist in Abbildung 4.13 zu sehen. Es gibt eine Version für ein DMM mit 3,5 Stellen (Anzeigebereich 0...1999) und eine Version mit 4,5 Stellen (Anzeigebereich 0...19999).

Das Wandlungsverfahren ist eine Delta-Sigma Wandlung, die mit einem niedrigen Aufwand zu realisieren ist und eine hohe Auflösung und Genauigkeit bietet. Die Wandlungszeit ist bei dieser Anwendung untergeordnet. Die benötigte Referenzspannung zur Messung wird im IC erzeugt. Es sind keine teuren externen Komponenten nötig, um ein Digitalmultimeter zu bauen.

In Abbildung 4.14 ist eine typische Applikationsschaltung dargestellt. Eine passende LCD-Anzeige kann direkt angeschlossen werden. Darüber hinaus sind nur noch ein paar Widerstände und Kondensatoren nötig.

Bei dieser Applikationsschaltung ist noch kein Netzwerk zur Messbereichsanpassung der Strom- und Spannungsbereiche an den Eingangsspannungsbereich des ICs vorhanden. Dies muss noch entwickelt und angeschlossen werden.

Zur Widerstandsmessung ist noch eine externe Stromquelle mit Beschaltung nötig.

19-2959; Rev 3; 5/04

EVALUATION KIT  
AVAILABLE**MAXIM****3.5- and 4.5-Digit, Single-Chip ADCs  
with LCD Drivers****General Description**

The MAX1492/MAX1494 low-power, 3.5- and 4.5-digit, analog-to-digital converters (ADCs) with integrated liquid crystal display (LCD) drivers operate from a single 2.7V to 5.25V power supply. They include an internal reference, a high-accuracy on-chip oscillator, and a triplexed LCD driver. An internal charge pump generates the negative supply needed to power the integrated input buffer for single-supply operation. The ADC is configurable for either a  $\pm 2V$  or  $\pm 200mV$  input range and outputs its conversion results to an LCD and/or to a microcontroller ( $\mu C$ ).  $\mu C$  communication is facilitated through an SPI™-/QSPI™-/MICROWIRE™-compatible serial interface. The MAX1492 is a 3.5-digit ( $\pm 1999$  count) device, and the MAX1494 is a 4.5-digit ( $\pm 19,999$  count) device.

The MAX1492/MAX1494 do not require external-precision integrating capacitors, autozero capacitors, crystal oscillators, charge pumps, or other circuitry required with dual-slope ADCs (commonly used in panel meter circuits).

These devices also feature on-chip buffers for the differential signal and reference inputs, allowing direct interface with high-impedance signal sources. In addition, they use continuous internal-offset calibration and offer  $>100dB$  simultaneous rejection of 50Hz and 60Hz line noise. Other features include data hold and peak hold, overrange and underrange detection, and a low-battery monitor.

The MAX1494 comes in a 32-pin, 7mm x 7mm TQFP package, and the MAX1492 comes in 28-pin SSOP and 28-pin PDIP packages. All devices in this family operate over the  $0^{\circ}C$  to  $+70^{\circ}C$  commercial temperature range.

**Features**

- ◆ High Resolution
  - MAX1494: 4.5 Digits ( $\pm 19,999$  Count)
  - MAX1492: 3.5 Digits ( $\pm 1999$  Count)
- ◆ Sigma-Delta ADC Architecture
  - No Integrating Capacitors Required
  - No Autozeroing Capacitors Required
  - $>100dB$  of Simultaneous 50Hz and 60Hz Rejection
- ◆ Operate from a Single 2.7V or 5.25V Supply
- ◆ Selectable Input Range of  $\pm 200mV$  or  $\pm 2V$
- ◆ Selectable Voltage Reference: Internal 2.048V or External
- ◆ Internal High-Accuracy Oscillator Needs No External Components
- ◆ Automatic Offset Calibration
- ◆ Low Power
  - Maximum 960 $\mu A$  Operating Current
  - Maximum 400 $\mu A$  Shutdown Current
- ◆ Small 32-Pin 7mm x 7mm TQFP Package (4.5 Digits), 28-Pin SSOP Package (3.5 Digits)
- ◆ Triplexed LCD Driver
- ◆ SPI-/QSPI-/MICROWIRE-Compatible Serial Interface
- ◆ Evaluation Kit Available (Order MAX1494EVKIT)

Abbildung 4.13: Datenblattauszug eines ICs für ein Digitalmultimeter

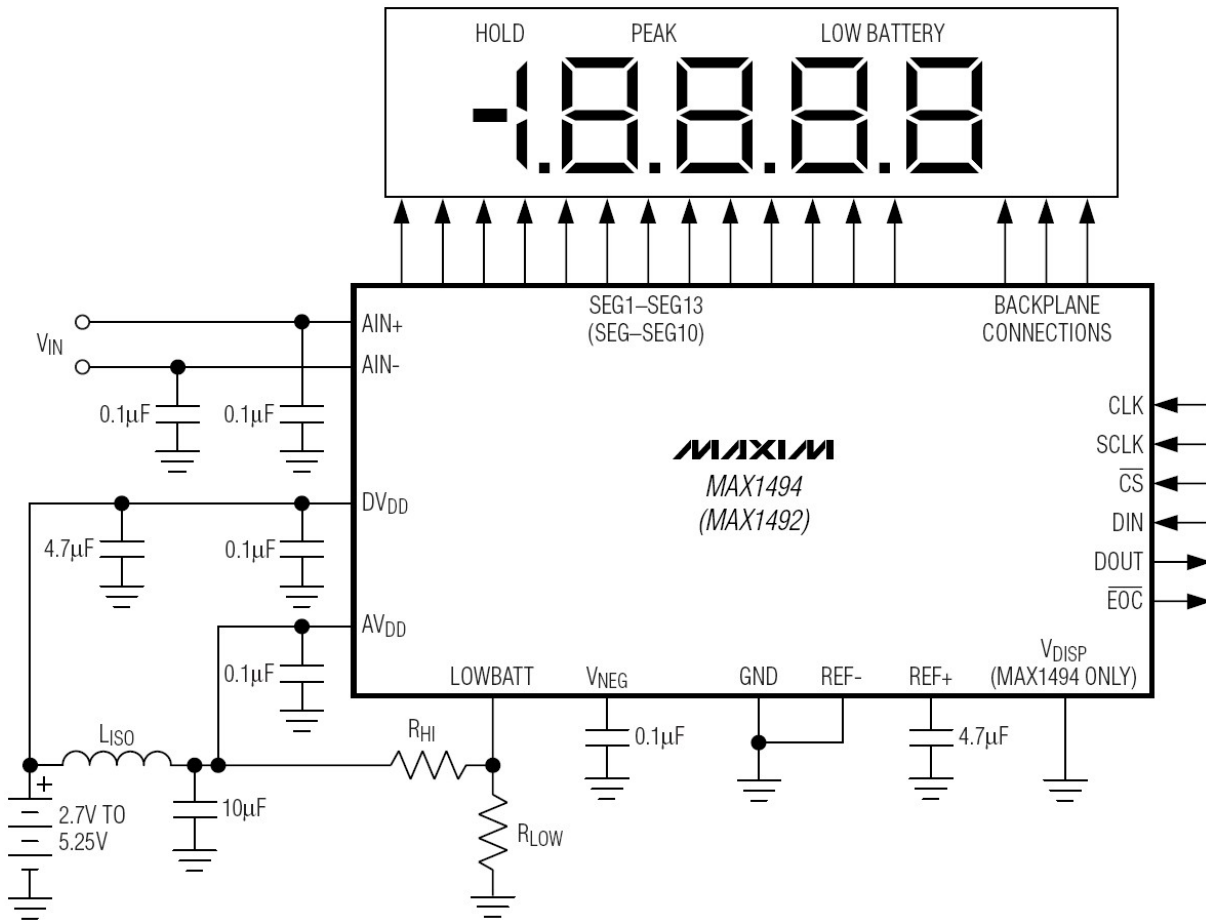


Abbildung 4.14: Applikationsschaltung für DMM-IC

## 4.4 Spannungs- und Strommessung

### 4.4.1 Spannungsmessung

Wie misst man Spannung?

⇒ parallel zum Messobjekt – Es ist kein Auftrennen des Stromkreises nötig!

In Abbildung 4.15 ist die Schaltung eines idealen und eines realen Voltmeters zu sehen.

Das ideale Voltmeter hat einen Innenwiderstand  $R_M \rightarrow \infty$ . Es fließt kein Strom durch das Gerät. Aus diesem Grund wird bei der Spannungsmessung keine Leistung ( $P = U \cdot I$ ) umgesetzt und dadurch die Messung nicht verfälscht.

Bei einem realen Voltmeter ist ein Innenwiderstand  $R_M$  parallel zum idealen Voltmeter geschaltet. Durch diesen fließt bei einer angelegten Spannung ein Strom

$$I_M = \frac{U_M}{R_M} \quad (4.43)$$

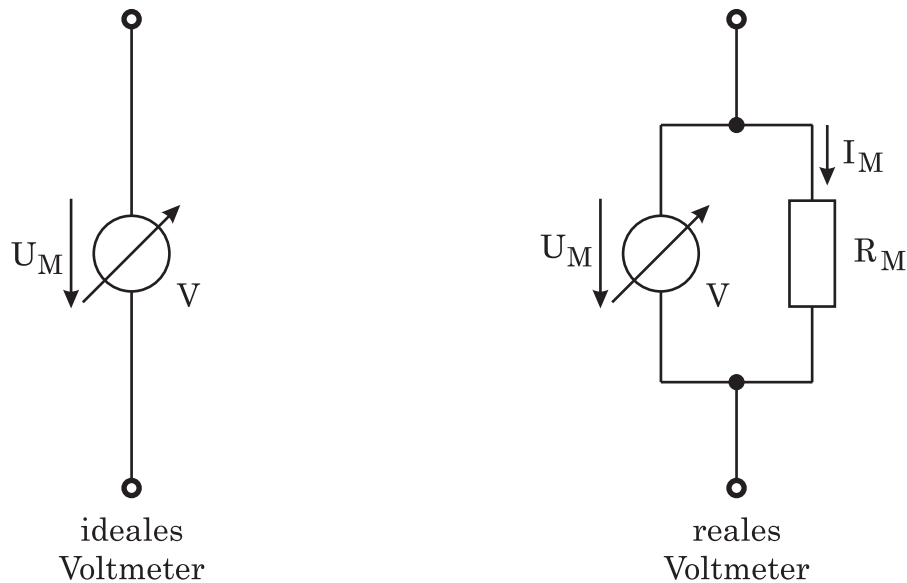


Abbildung 4.15: Spannungsmessung

Aus diesem Grund ist die Spannungsmessung nicht mehr leistungslos und das Messergebnis wird durch den Innenwiderstand des Voltmeters verfälscht.

Für eine relativ genaue Messung muss der Innenwiderstand des Voltmeters deutlich größer als die Widerstände in der zu messenden Schaltung sein. !

### Messbereichserweiterung

Es gibt eine maximale Spannung, die das Voltmeter messen kann. Ist die zu messende Spannung größer, so muss der Messbereich durch einen Spannungsteiler erweitert werden (Abbildung 4.16).

Dieser kann mittels der Spannungsteilerformel berechnet werden.

$$\frac{U_M}{U} = \frac{R_M}{R_V + R_M} \quad (4.44)$$

Hierbei ist  $U$  die zu messende Spannung an den Klemmen.

Für den Vorwiderstand folgt aus (4.44):

$$R_V = \left( \frac{U}{U_M} - 1 \right) \cdot R_M \quad (4.45)$$

### 4.4.2 Strommessung

Wie misst man Strom?

⇒ in Serie zum Messobjekt – Es ist (leider) ein Auftrennen des Stromkreises nötig!



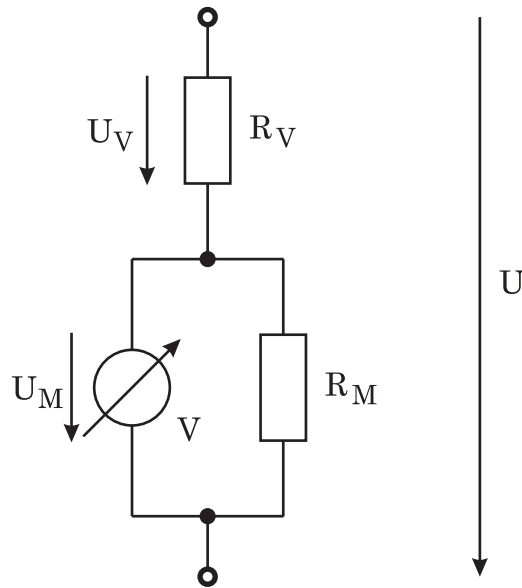


Abbildung 4.16: Voltmeter mit Messbereichserweiterung

In Abbildung 4.17 ist das Schaltbild eines idealen und eines realen Amperemeters dargestellt.

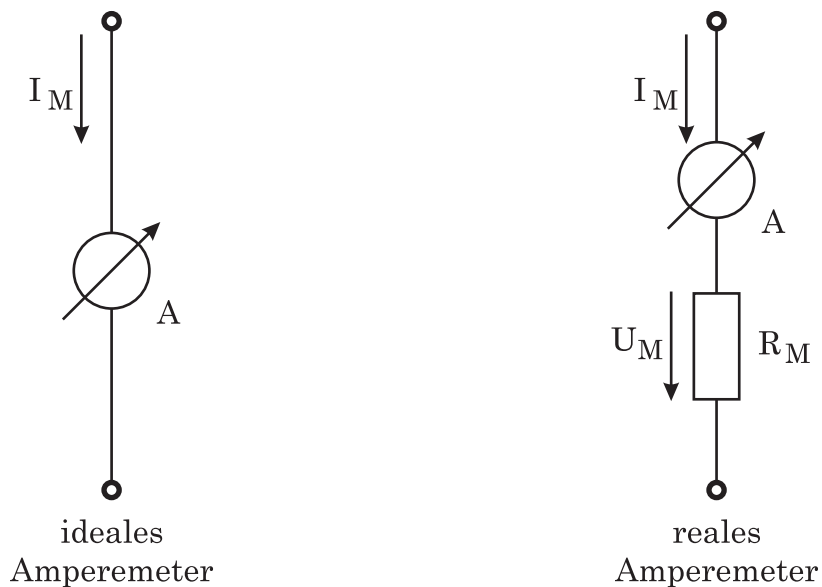


Abbildung 4.17: Strommessung

Das ideale Amperemeter besitzt einen Innenwiderstand  $R_M = 0\Omega$ . Es fällt keine

Spannung am Amperemeter ab, die Messung ist damit leistungslos. Dadurch wird das zu messende Objekt nicht beeinflusst.

Das reale Amperemeter besitzt einen endlichen Innenwiderstand, der im Schaltbild in Serie zum idealen Amperemeter geschaltet ist. An diesem Widerstand fällt eine Spannung ab

$$U_M = I_M \cdot R_M . \quad (4.46)$$

Dadurch wird das Messergebnis verfälscht.

Für eine genaue Messung muss der Widerstand des Amperemeters deutlich kleiner sein als das Widerstandsniveau des zu messenden Stromkreises. !

**Niemals eine Spannungsmessung mit einem Amperemeter durchführen.**

### Messbereichserweiterung

Ist der zu messende Strom größer als der zulässige Maximalstrom des Amperemeters, so muss der Messbereich erweitert werden (Abbildung 4.18). Dies geschieht durch Parallelschaltung eines Widerstandes, durch den ein Teil des Stromes fließt.

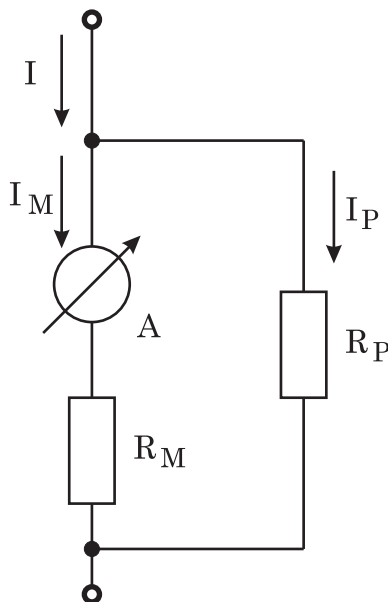


Abbildung 4.18: Amperemeter mit Messbereichserweiterung

Die Berechnung des Parallelwiderstandes kann mit der Stromteilerregel erfolgen. Nachfolgend wird die Gleichung ausführlich hergeleitet. Die Spannungen am Innenwiderstand des Messwerkes und am Parallelwiderstand sind gleich (vergl. Abbildung 4.18). Es gilt

$$U_M = U_P . \quad (4.47)$$

Anstelle der Spannungen in (4.47) werden die Produkte aus Strom und Widerstand eingesetzt und umgeformt:

$$R_M \cdot I_M = R_P \cdot I_P \quad (4.48)$$

$$R_M \cdot I_M = R_P (I - I_M) \quad (4.49)$$

$$R_M \cdot I_M + R_P \cdot I_M = R_P \cdot I \quad (4.50)$$

$$I_M (R_M + R_P) = I \cdot R_P \quad (4.51)$$

Aus (4.51) folgt für den Parallelwiderstand  $R_P$  :

$$R_P = R_M \cdot \frac{I_M}{I - I_M} \quad (4.52)$$

#### 4.4.2.1 Direkte Strommessung

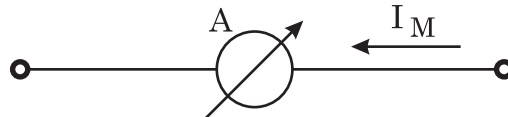


Abbildung 4.19: Direkte Strommessung

Die direkte Strommessung ist in Abbildung 4.19 dargestellt. Die Leiterbahn wird aufgetrennt und das Amperemeter wird hineingeschaltet. Dies ist manchmal unmöglich, zum Beispiel wenn die Leiterbahn in einer Innenlage einer Multilayer-Platine verläuft.

#### 4.4.2.2 Strommessung über Shunt

In Abbildung 4.20 ist die Strommessung mittels eines Shuntwiderstandes dargestellt. Es wird ein Präzisionswiderstand in den Stromkreis eingebracht, an dem die Spannung gemessen wird. Für den Strom ergibt sich dann:

$$I_M = \frac{U_M}{R_S} . \quad (4.53)$$

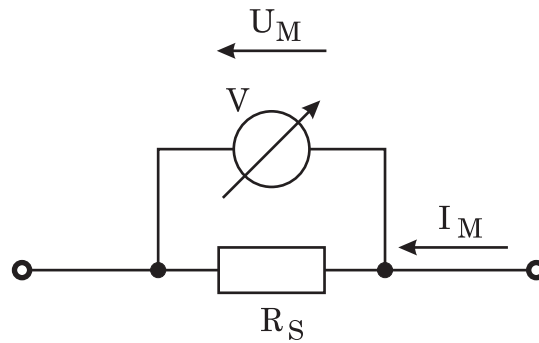


Abbildung 4.20: Strommessung über Shuntwiderstand

Bei dieser Messanordnung ist darauf zu achten, dass die Spannung  $U_S$  klein gegenüber den anderen Spannungen ist, damit die Verfälschung der Messung gering bleibt.

Es werden spezielle Messwiderstände mit kleinem Widerstand und geringer Toleranz eingesetzt (Hersteller z.B. Isabellenhütte). Diese besitzen manchmal vier Anschlüsse, um die Spannung mittels einer Vierleitermessung zu bestimmen. Dadurch werden Fehler durch Übergangswiderstände ausgeschlossen (siehe auch Kapitel 4.6.2).

#### 4.4.2.3 Strommessung über Magnetfeld

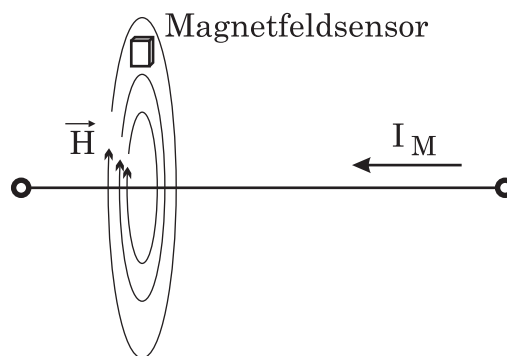


Abbildung 4.21: Strommessung über Magnetfeld

In den Kapiteln 4.4.2.1 und 4.4.2.2 wurden Verfahren zur Strommessung vorgestellt, bei denen die zu messende Leitung aufgetrennt werden muss, was oft nur schwer möglich ist.

Aus diesem Grund wird manchmal der Strom indirekt über die magnetische Feldstärke gemessen (schematische Darstellung in Abbildung 4.21).

Das Durchflutungsgesetz (2.Maxwellsche Gleichung)

$$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{S} \cdot d\vec{A} \quad (4.54)$$

mit  $\vec{H}$  – magnetische Feldstärke

und  $\vec{S}$  – Stromdichte

besagt, daß das Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke gleich dem Integral der Stromdichte in einem bestimmten Flächenelement ist. Weiterhin gilt, daß die Stärke des Stroms durch eine vorgegebene Fläche durch genau diese Integration aus dem Vektorfeld der Stromdichte ermittelt werden kann, also

$$\iint_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = i . \quad (4.55)$$

Aus (4.54) und (4.55) folgt für **einen** stromdurchflossenen Leiter

$$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_M \quad (4.56)$$

Das Umlaufintegral ergibt für einen geraden, unendlich langen Stromfaden

$$\left| \vec{H} \right| \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = I_M , \quad (4.57)$$

da die magnetische Feldstärke bei konstantem Abstand zu dem Leiter ebenfalls konstant ist. Damit folgt für den Betrag der magnetischen Feldstärke  $\left| \vec{H} \right|$  in einem bestimmten Abstand  $r$  von einem stromdurchflossenen Leiter

$$\left| \vec{H} \right| = \frac{I_M}{2 \cdot \pi \cdot r} = H . \quad (4.58)$$

Magnetfeldsensoren, wie in Abbildung 4.21 dargestellt, messen jedoch normalerweise den Betrag der magnetischen Flussdichte  $\left| \vec{B} \right|$ .

Der Zusammenhang zwischen beiden Größen ist durch

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H \quad (4.59)$$

gegeben. Damit folgt aus (4.58) für die magnetische Flussdichte um einen stromdurchflossenen Leiter

$$B = \frac{I_M \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad (4.60)$$

und daraus für den Strom  $I_M$

$$I_M = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot B \quad (4.61)$$

Die magnetische Flussdichte  $B$  ist folglich proportional zum Strom  $I_M$  durch den Leiter. So kann man bei bekannten Größen  $r, \mu_0, \mu_r$  in (4.61) den Strom mit Hilfe des Magnetfeldes bestimmen.

Die hauptsächlichen Vor- und Nachteile gegenüber den anderen Messverfahren sind:

- + Der Leiter muss für die Strommessung nicht aufgetrennt werden.
- + Der zu messende Stromkreis wird weniger beeinflusst als bei den anderen Strommessungen.
- + Es entsteht keine Verlustleistung im Amperemeter oder im Shuntwiderstand.
- + Das Verfahren ist sehr gut für hohe Ströme geeignet.
- Der Aufwand ist größer als bei den anderen Verfahren.
- Die Messung ist bei sehr hohen Frequenzen nicht möglich.
- Die Empfindlichkeit ist geringer als bei den anderen Verfahren.

### 4.4.3 Vielfachinstrument

Oft will man mit einem Messwerk sowohl Spannungs- als auch Strommessung in unterschiedlichen Messbereichen messen. Dazu wird das Messwerk beschaltet, wie in Abbildung 4.22 zu sehen ist.

Durch einen Drehschalter wird zwischen den einzelnen Messbereichen umgeschaltet. Hierbei sind die Strommessbereiche in den Schalterstellungen 1-3 und die Spannungsmessbereiche in den Schalterstellungen 4-6.

Dimensioniert man das Messgerät, so sind folgende Werte bekannt:

- Kenndaten des Messwerkes  $I_M$  und  $R_M$
- zu messende Ströme  $I_1, I_2$  und  $I_3$
- zu messende Spannungen  $U_4, U_5$  und  $U_6$

Die Widerstandswerte  $R_{P1}, R_{P2}, R_{P3}, R_{S1}, R_{S2}$  und  $R_{S3}$  werden berechnet.

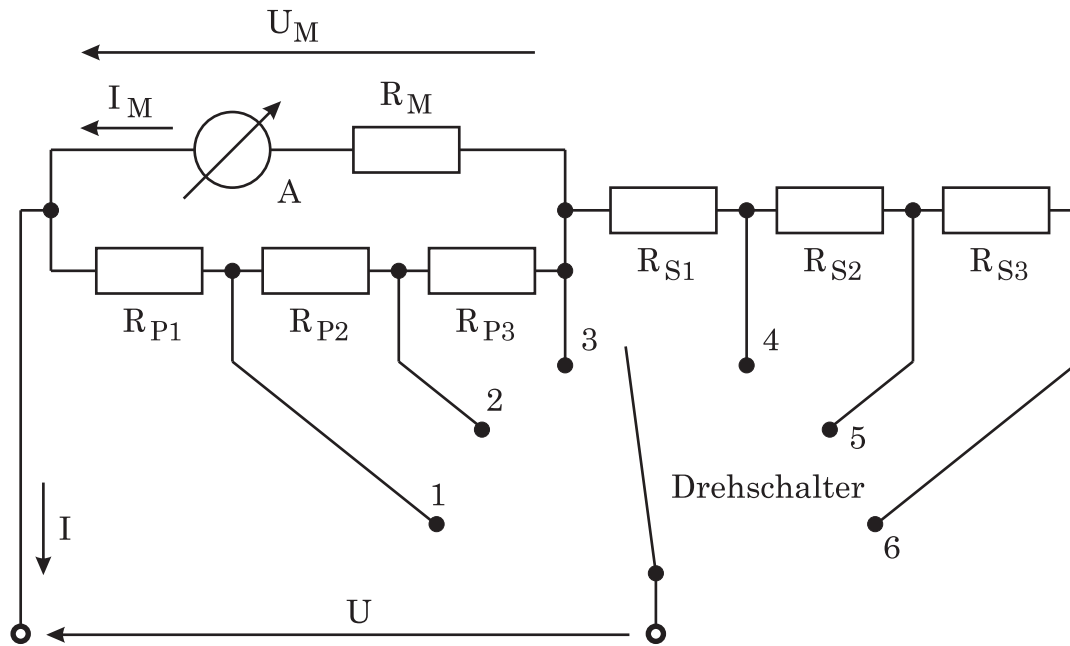


Abbildung 4.22: Beschaltung eines Messwerks zu einem Vielfachinstrument

**Berechnung der Strommessbereiche:**

Zur Berechnung der Strommessbereiche wird nur der linke Teil der Schaltung ( $R_{P1}$ ,  $R_{P2}$ ,  $R_{P3}$ ) betrachtet. Dazu wird die Stromteilerregel angewendet.

Schalterstellung 1:

$$I_M = I_1 \cdot \frac{R_{P1}}{\sum R_P + R_M} \quad (4.62)$$

mit  $\sum R_P = R_{P1} + R_{P2} + R_{P3}$ .

Schalterstellung 2:

$$I_M = I_2 \cdot \frac{R_{P1} + R_{P2}}{\sum R_P + R_M} \quad (4.63)$$

Schalterstellung 3:

$$I_M = I_3 \cdot \frac{R_{P1} + R_{P2} + R_{P3}}{\sum R_P + R_M} = I_3 \cdot \frac{\sum R_P}{\sum R_P + R_M} \quad (4.64)$$

Zuerst kann man aus (4.64) die Summe der Widerstände  $\sum R_P$  ausrechnen:

$$I_M \cdot (\sum R_P + R_M) = I_3 \cdot \sum R_P \quad (4.65)$$

$$I_M \cdot \sum R_P + I_M \cdot R_M = I_3 \cdot \sum R_P \quad (4.66)$$

$$\sum R_P \cdot (I_3 - I_M) = I_M \cdot R_M \quad (4.67)$$

$$\sum R_P = \frac{I_M \cdot R_M}{I_3 - I_M} \quad (4.68)$$

Die Summe der Widerstände kann man nun (4.62) einsetzen und damit  $R_{P1}$  ausrechnen:

$$R_{P1} = \frac{I_M \cdot (\sum R_P + R_M)}{I_1} . \quad (4.69)$$

Nun löst man (4.63) nach  $R_{P2}$  auf:

$$R_{P2} = \frac{I_M \cdot (\sum R_P + R_M)}{I_2} - R_{P1} . \quad (4.70)$$

Zum Schluss erhält man  $R_{P3}$  aus der Summenbeziehung

$$R_{P3} = \sum R_P - R_{P1} - R_{P2} . \quad (4.71)$$

### Berechnung der Spannungsmessbereiche:

Nun wird zur Spannungsberechnung die gesamte Schaltung betrachtet. Es wird die Spannungsteilerregel angewendet.

Der Gesamtwiderstand des linken Schaltungsteils ergibt sich zu

$$R = \frac{\sum R_P \cdot R_M}{\sum R_P + R_M} . \quad (4.72)$$

Betrachtet man nun die Spannungsmessung in Schalterstellung 4, so folgt für die Spannung  $U_M$  am Messwerk:

$$U_M = U_4 \cdot \frac{R}{R + R_{S1}} = I_M \cdot R_M \quad (4.73)$$

Diese Gleichung löst man nun nach  $R_{S1}$  auf

$$\frac{R}{R + R_{S1}} = \frac{I_M \cdot R_M}{U_4} \quad (4.74)$$

$$R_{S1} + R = \frac{R \cdot U_4}{I_M \cdot R_M} \quad (4.75)$$

$$R_{S1} = R \left( \frac{U_4}{I_M \cdot R_M} - 1 \right) . \quad (4.76)$$

Für Schalterstellung 5 gilt analog:

$$U_M = U_5 \cdot \frac{R}{R + R_{S1} + R_{S2}} = I_M \cdot R_M \quad (4.77)$$

$$R_{S2} = R \left( \frac{U_5}{I_M \cdot R_M} - 1 \right) - R_{S1} \quad (4.78)$$

wie auch für Schalterstellung 6:

$$U_M = U_6 \cdot \frac{R}{R + R_{S1} + R_{S2} + R_{S3}} = I_M \cdot R_M \quad (4.79)$$



$$R_{S3} = R \left( \frac{U_6}{I_M \cdot R_M} - 1 \right) - R_{S1} - R_{S2} \quad (4.80)$$

Damit sind alle unbekanntes Widerstände berechnet.

Das Berechnungsverfahren kann man natürlich auch für Vielfachinstrumente mit einer anderen Zahl von Messbereichen anwenden.

## 4.5 Widerstandsmessung

Eine weitere häufig verwendete Messmethode ist die Widerstandsmessung. Nachfolgend werden einige dieser Möglichkeiten aufgezeigt.

Die Grundgleichung

$$R = \frac{U}{I} \quad (4.81)$$

gilt immer. Aus diesem Grund muss bei der Bestimmung eines unbekanntes Widerstandswertes sowohl die Spannung am Widerstand als auch der Strom durch den Widerstand bekannt sein.

### 4.5.1 Spannungsrichtige Messung

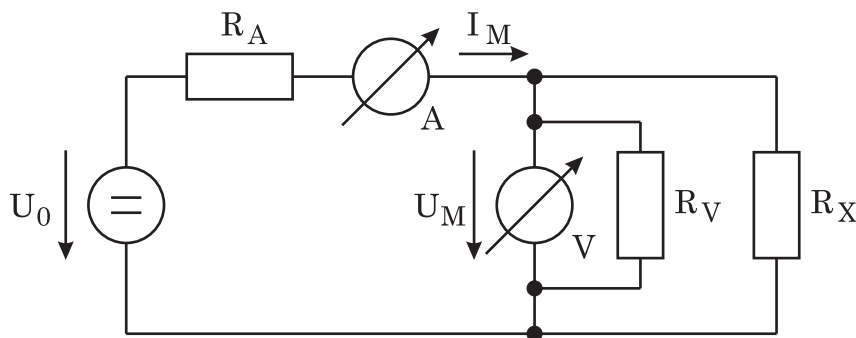


Abbildung 4.23: Spannungsrichtige Widerstandsmessung

In [Abbildung 4.23](#) ist die spannungsrichtige Widerstandsmessung dargestellt. Das Voltmeter misst die Spannung direkt am Widerstand  $R_X$ . Das Amperemeter misst den Strom sowohl durch den Widerstand als auch durch das Voltmeter, wodurch der Anzeigewert zu hoch wird.

Der Strom durch das Voltmeter ist vernachlässigbar, wenn

$$R_V \gg R_X \quad (4.82)$$

der Innenwiderstand des Voltmeters  $R_V$  wesentlich größer ist als der zu messende Widerstand  $R_X$ . Dann wird die Messung näherungsweise richtig.

Man sieht, dass die Messschaltung für relativ kleine Widerstände (im Vergleich zum Innenwiderstand des Voltmeters) gut geeignet ist. !

### Rechnerische Korrektur des Messfehlers

Kann man den Messfehler durch den Innenwiderstand des Voltmeters nicht vernachlässigen, so kann man diesen korrigieren, sofern  $R_V$  bekannt ist.

Der gemessene Widerstandswert  $R_M$  ist fehlerbehaftet und ergibt sich zu

$$R_M = \frac{U_M}{I_M} = \frac{U_M}{I_X + I_V} \quad (4.83)$$

Hierbei ist  $I_X = \frac{U_M}{R_X}$  der Strom durch den Widerstand und  $I_V = \frac{U_M}{R_V}$  der Strom durch das Voltmeter. Setzt man diese Größen in (4.83) ein und formt um, so erhält man:

$$R_M = \frac{U_M}{\frac{U_M}{R_X} + \frac{U_M}{R_V}} = \frac{U_M}{U_M \left( \frac{1}{R_X} + \frac{1}{R_V} \right)} \quad (4.84)$$

$$\frac{1}{R_M} = \frac{1}{R_X} + \frac{1}{R_V} \quad (4.85)$$

$$\frac{1}{R_X} = \frac{1}{R_M} - \frac{1}{R_V} \quad (4.86)$$

$$R_X = \frac{1}{\frac{1}{R_M} - \frac{1}{R_V}} \quad (4.87)$$

Diese Gleichungen erinnern an eine Parallelschaltung von Widerständen. Überträgt man die Beschaltung des realen Voltmeter aus Abbildung 4.15 in die Abbildung 4.23, so erhält man genau diese Parallelschaltung der Widerstände.

### 4.5.2 Stromrichtige Messung

Bei der stromrichtigen Widerstandsmessung gemäß Abbildung 4.24 misst das Amperemeter nur den Strom durch den Widerstand.

Das Voltmeter misst den Spannungsabfall über dem Widerstand und dem Amperemeter und zeigt damit einen zu hohen Wert an.

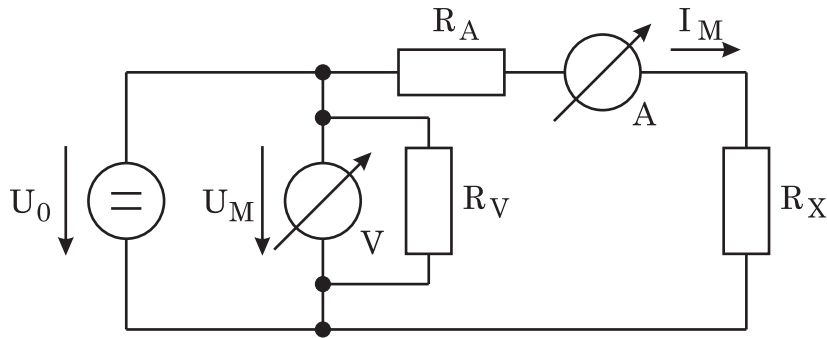


Abbildung 4.24: Stromrichtige Widerstandsmessung

Der Spannungsabfall am Amperemeter ist zu vernachlässigen, wenn der Innenwiderstand des Amperemeters  $R_A$  wesentlich kleiner ist als der zu messende Widerstand  $R_X$

$$R_A \ll R_X . \quad (4.88)$$

Man sieht, dass die Messschaltung für relativ große Widerstände (im Vergleich zum Innenwiderstand des Amperemeters) gut geeignet ist. !

### Rechnerische Korrektur des Messfehlers

Kann man den Messfehler nicht vernachlässigen, so kann man den korrekten Widerstandswert bei bekanntem Innenwiderstand des Amperemeters  $R_A$  berechnen:

$$R_M = \frac{U_M}{I_M} = \frac{U_A + U_X}{I_M} \quad (4.89)$$

$$= \frac{I_M \cdot R_A + I_M \cdot R_X}{I_M} = R_A + R_X \quad (4.90)$$

mit der Spannung am Amperemeter  $U_A = I_M \cdot R_A$  und der Spannung am unbekannten Widerstand  $U_X = I_M \cdot R_X$ .

Es folgt für  $R_X$ :

$$R_X = R_M - R_A . \quad (4.91)$$

Setzt man das reale Amperemeter aus Abbildung 4.17 in Abbildung 4.24 ein, so erkennt man ebenfalls den Zusammenhang der Reihenschaltung von zwei Widerständen.

### 4.5.3 Messung mit Stromquelle

Eine weitere Möglichkeit der Widerstandsmessung ist die Benutzung einer Stromquelle mit einem definierten Ausgangsstrom gemäß Abbildung 4.25.

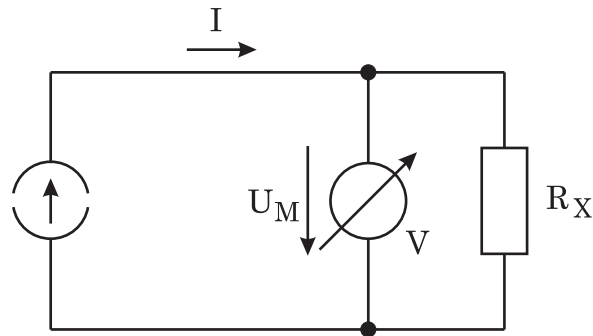


Abbildung 4.25: Widerstandsmessung mit Stromquelle

Die Spannung am Widerstand wird gemessen und aus dieser der Widerstand berechnet.

Dieses Verfahren wird manchmal bei Multimetern angewendet, da die Spannungsmessung im Gerät sowieso vorhanden ist. Es muss nur noch durch Umskalierung der Skala bei Analogmultimetern oder durch Berechnung in einem IC bei Digitalmultimetern der korrekte Widerstandswert angezeigt werden.

Alternativ kann man auch eine Spannungsquelle verwenden und den Strom durch den Widerstand messen.

## 4.6 Zweileitermessung - Vierleitermessung

Nachfolgend werden die Prinzipien der Zwei- und Vierleitermessung vorgestellt. Dies sind allgemeine Messprinzipien, die hier am Beispiel der Widerstandsmessung vorgestellt werden.

Genauso gilt das Prinzip der Zwei- und Vierleitermessung aber z.B. auch bei der Strommessung über einen Shuntwiderstand.

Bei der Zweileitermessung sind der zu messende Stromkreis und der Messkreis vereint, bei der Vierleitermessung sind diese getrennt.

### 4.6.1 Zweileitermessung

In Abbildung 4.26 ist die Zweileitermessung in der Anwendung Widerstandsmessung dargestellt.

Der zu messende Widerstand kann für eine exakte Modellierung in den eigentlichen Widerstand  $R_X$  und in Zuleitungs- und Übergangswiderstände aufgeteilt werden, die hier mit  $R_L$  bezeichnet werden.

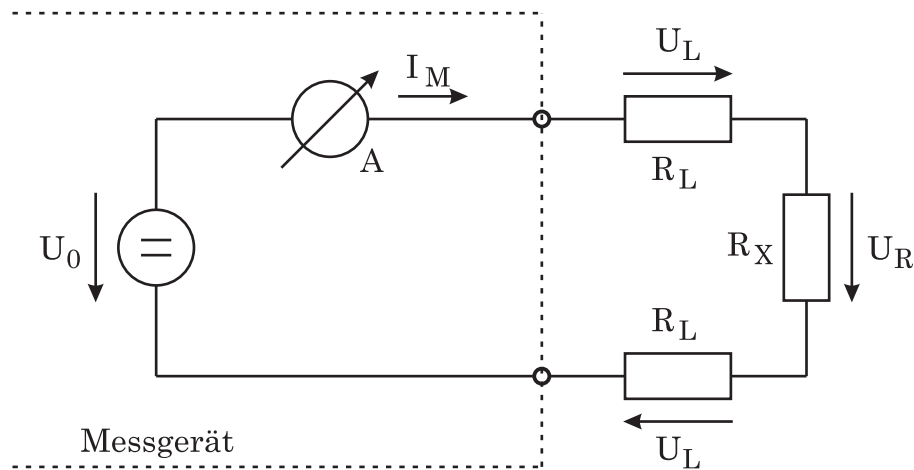


Abbildung 4.26: Zweileitermessung

Bei der Zweileitermessung wird der Widerstand über die gleichen Leitungen versorgt und die Werte für Strom- und Spannung werden gemessen.

Eigentlich will man den Wert  $R_X$  messen, genaugenommen misst bei der Zweileitermessung jedoch  $R_X + 2 \cdot R_L$ . Dies ist unerheblich, solange  $R_X \gg R_L$  ist. Ist jedoch  $R_X \approx 1\Omega$ , so sind die Zuleitungswiderstände in der gleichen Größenordnung und man macht einen deutlichen Messfehler.

#### 4.6.2 Vierleitermessung

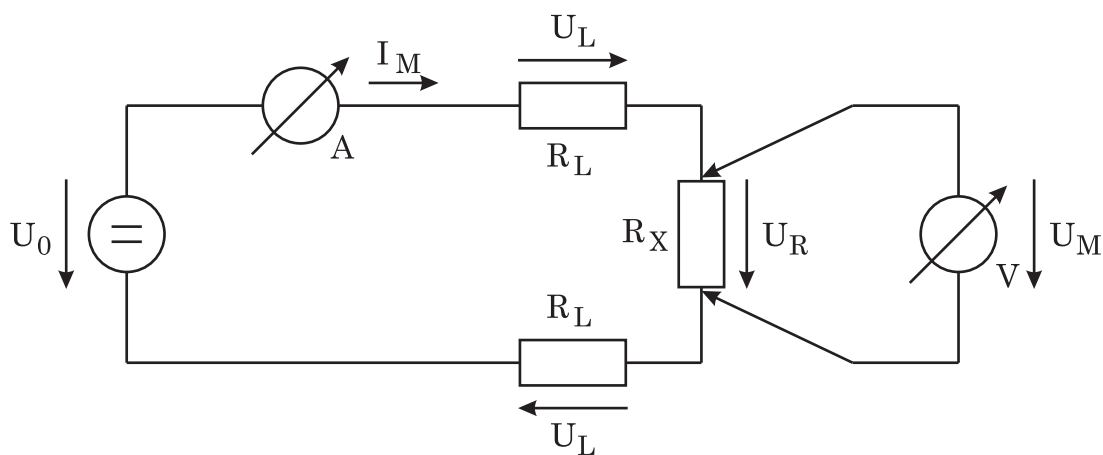


Abbildung 4.27: Vierleitermessung

Bei der Vierleitermessung gemäß Abbildung 4.27 wird die Versorgung des Widerstandes von der eigentlichen Messung getrennt.

Direkt am Widerstand sind die Messleitungen für die Spannungsmessung angebracht. Dies kann realisiert sein, indem der Widerstand zwei zusätzliche Anschlüsse besitzt. Man kann aber auch mittels Messspitzen direkt an Enden des Widerstandes messen.

Es wird nur die Spannung an  $R_X$  gemessen, da die Zuleitungswiderstände  $R_L$  außerhalb des Spannungsabgriffs sind.

Die Leitungswiderstände zum Voltmeter spielen keine Rolle, da hier aufgrund des sehr hohen Innenwiderstandes des Voltmeters kaum Strom fließt und so praktisch keine Spannung an den Leitungswiderständen entsteht. !

Man sieht, dass man bei der Vierleitermessung kleine Widerstände wesentlich genauer messen kann als bei der Zweileitermessung.

## 4.7 Kapazitätsmessung

Auch für die Messung einer Kapazität gibt es zahlreiche Verfahren. Nachfolgend wird die Messung mittels Wechselstromquelle und Spannungsmessung am Kondensator vorgestellt (Abbildung 4.28).

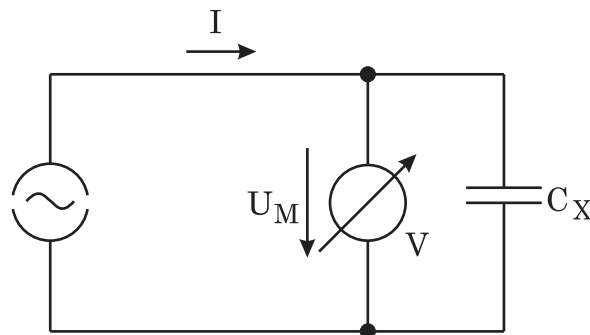


Abbildung 4.28: Kapazitätsmessung mit Stromquelle

Eine Wechselstromquelle liefert einen eingepprägten Strom mit der Kreisfrequenz  $\omega$ . Am Kondensator  $C_X$  wird die Spannung  $U_M$  gemessen. Der Kondensator wird als verlustlos angenommen. Dann hat er die komplexe Impedanz

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C_X} = \frac{U_M}{I} \quad (4.92)$$

Die komplexe Impedanz ist rein imaginär. Aus diesem Grund ist nur eine Größe zur vollständigen Bestimmung des Kondensators nötig und die Messung des Betrags einer Spannung ausreichend.

Betrachtet man nun die Beträge von (4.92) und formt man diese entsprechend um, so erhält man die unbekannte Kapazität  $C_X$ :

$$\left| \frac{1}{j\omega \cdot C_X} \right| = \left| \frac{\underline{U}_M}{\underline{I}} \right| \quad (4.93)$$

$$\frac{1}{\omega \cdot C_X} = \frac{|\underline{U}_M|}{|\underline{I}|} \quad (4.94)$$

$$C_X = \frac{|\underline{I}|}{\omega \cdot |\underline{U}_M|} . \quad (4.95)$$

Alternativ gibt es viele andere Messmöglichkeiten, wie z.B. mit einer Messbrücke oder über die Entladezeit eines Kondensators.

# 5 Oszilloskope

## 5.1 Zweck und Funktionsprinzip

Mit einem Oszilloskop werden beliebige Spannungsverläufe auf einem Bildschirm sichtbar gemacht. Dies kann für Frequenzen bis in den 100GHz-Bereich geschehen. Dazu wird die Spannung abgetastet (analog oder digital), die Werte entsprechend verstärkt und weiter verarbeitet. Auf dem Bildschirm wird dann den zeitlichen Verlauf der Spannung abgebildet.

Darstellung und Messung eines unbekanntem Spannungsverlaufs

Das Oszilloskop und das Multimeter sind zwei gegensätzliche Messgeräte, die Stärken des einen sind gleichzeitig die Schwächen des anderen. Aus diesem Grund wählt man in der Praxis je nach Messaufgabe das entsprechende Messgerät aus. Manchmal sind Messungen mit beiden Geräten nötig, um alle benötigten Informationen zu bekommen. In Tabelle 5.1 sind die Eigenschaften der beiden Messgeräte gegenüber gestellt.

Multimeter	Oszilloskop
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Messung bekannter Spannungsformen</li> <li>• Strommessung, Widerstandsmessung               <ul style="list-style-type: none"> <li>• hoch genaue Messung</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Messung unbekannter Spannungsformen               <ul style="list-style-type: none"> <li>• Frequenzmessung, Phasenmessung</li> <li>• Überblick über Signal</li> </ul> </li> </ul>

Tabelle 5.1: Vergleich Multimeter - Oszilloskop

### Typische Messaufgaben

Es gibt unzählige Anwendungen von Oszilloskopen, z.B.

- Messung der Kurvenform einer Spannung: Wie groß sind Effektivwert, Frequenz und wie ist die Form der Spannung?



- Messung seltener Ereignisse: Es tritt sporadisch ein Fehler auf (z.B. Rechnerabsturz, Fehlverhalten einer elektronischen Baugruppe), der mit einer Abweichung einer Spannung in Verbindung steht. Wie sieht die Spannung im Fehlerfall aus?
- Messung der zeitlichen Beziehung von Signalen zueinander: Wie groß ist die Phasendifferenz zwischen zwei Spannungen?
- Messung besonderer Eigenschaften von Signalen: Ist das Ausgangssignal eines Verstärkers verzerrt?
- ...

### Einige Hersteller von Oszilloskopen:

**Agilent:** <http://www.agilent.com>

Weltweit größter Hersteller von Messgeräten mit einer sehr breiten Angebotspalette. Es sind auch Oszilloskope bis zu höchsten Frequenzen vorhanden.

**Hameg:** <http://www.hameg.de>

Hersteller von preisgünstigen Oszilloskopen, die gerne von Privatanwendern benutzt werden.

**LeCroy:** <http://www.lecroy.de>

Oszilloskope mit einem guten Preis-Leistungs-Verhältnis für viele Messaufgaben.

**Tektronix:** <http://www.tek.com/de>

Marktführer nach Stückzahl und Bandbreite der angebotenen Oszilloskope.

**Yokogawa:** <http://www.yokogawa.com/de>

Großer japanischer Hersteller von Messgeräten, unter anderem bietet er auch Oszilloskope an.

### Virtuelles Oszilloskop

Im Internet gibt es die folgende Seite:

<http://www.virtuelles-oszilloskop.de>

Auf dieser Seite kann man ein virtuelles 20MHz-Oszilloskop von Hameg bedienen und damit virtuelle Messungen durchführen.

Probieren Sie es doch einfach mal aus!

## 5.2 Analogoszilloskop

Analogoszilloskope waren bis vor einigen Jahren der vorherrschende Oszilloskoptyp. Mit der Entwicklung der Halbleitertechnik und der damit verbundenen Verbesserung der A/D-Wandler wurden die Analogoszilloskope in der Zwischenzeit nahezu vollständig von den Digitaloszilloskopen verdrängt.

Als Einführung in die Thematik werden die Analogoszilloskope im Folgenden beschrieben.

### Funktionsprinzip

Zur Darstellung der Spannung wird eine Braun'sche Röhre verwendet (ähnlich wie bei Fernsehern mit Bildröhre). In einer evakuierten Glasröhre sitzt eine Glühkathode, die Elektronen erzeugt. Diese werden von einer Beschleunigungseinheit auf eine hohe Geschwindigkeit gebracht und prallen auf einen Phosphorschirm, den sie zum Leuchten bringen.

Die Position des Strahls in x- und y-Richtung wird durch zwei Plattenpaare gesteuert, zwischen den je ein elektrisches Feld zur Ablenkung der Elektronen erzeugt wird.

### Blockschaltbild

Abbildung 5.1 zeigt das stark vereinfachte Blockschaltbild eines Analogoszilloskops. Ein Analogoszilloskop besitzt folgende Komponenten:

- **Einstellung der Kopplungsart AC – DC:**  
Schalter S1 für den y-Kanal, Schalter S2 für den x-Kanal. Mit diesen Schaltern kann man die Kopplungsart einstellen. Bei der DC-Kopplung werden alle Frequenzanteile gemessen, bei der AC-Kopplung werden nur die Wechselspannungsanteile gemessen, mehr dazu in Kapitel 5.5.4.
- **y-Kanal:**  
Im Block „einstellbare y-Verstärkung“ wird die die Empfindlichkeit der Ordinate (y-Richtung) eingestellt (Volt pro Division). In Abhängigkeit von der Spannung am y-Eingang wird die Empfindlichkeit so gewählt, dass die Spannung möglichst bildschirmfüllend dargestellt wird.  
Im Block „y-Ablenkung“ wird alles zusammengefasst, was notwendig ist, um die y-Spannung am Bildschirm darzustellen, wie z.B. die Erzeugung der Ablenkspannung.
- **x-Kanal:**  
Im diesen Blöcken wird analog zu den Blöcken für den y-Kanal die Spannung für die Abszisse (x-Kanal) erzeugt.

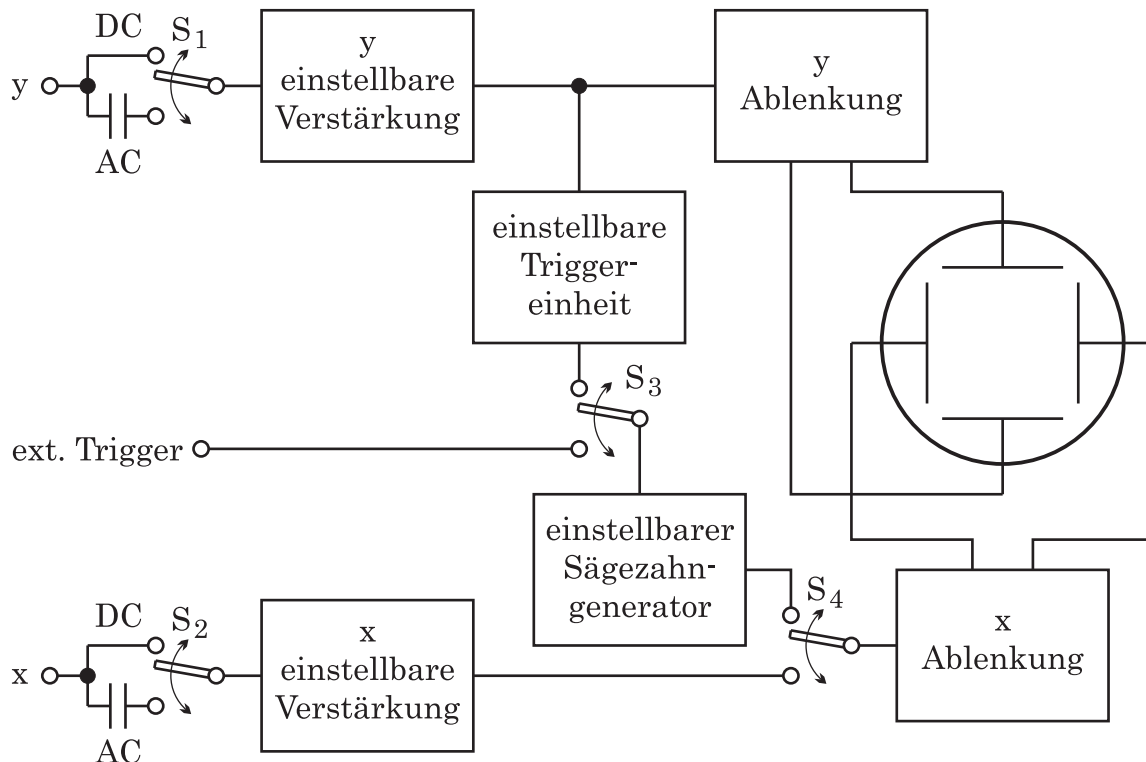


Abbildung 5.1: Blockschaltbild eines Analogoszilloskops

- **Einstellbarer Sägezahn-generator:**  
In diesem Block wird eine Sägezahnspannung erzeugt, welche die x-Position in Abhängigkeit der Zeit erzeugt, was in Kapitel 5.5.1 genauer gezeigt wird.
- **Triggerung intern – extern:**  
Mit dem Schalter S3 kann man zwischen interner und externer Triggerung wählen. Ist der Schalter mit dem Block „einstellbare Triggereinheit“ verbunden, so wird der Trigger aus dem y-Eingangssignal erzeugt, anderenfalls wird der Trigger aus einem separaten Triggereingang gewonnen. Mehr dazu in Kapitel 5.4.
- **yt-Betrieb – xy-Betrieb:**  
Mit dem Schalter S4 kann man zwischen diesen beiden Betriebsarten umschalten. Ist der Schalter mit dem Block „einstellbarer Sägezahn-generator“ verbunden, so wird die Zeit als Abszisse dargestellt, ist der Schalter mit dem x-Eingang verbunden, so wird als Abszisse die Spannung am x-Eingang dargestellt (xy-Betrieb). Beide Betriebsarten werden in den Kapiteln 5.5.1 und 5.5.7 genauer beschrieben.

In Abbildung 5.2 ist ein Analogoszilloskop zu sehen, wie es z.T. auch an der Hochschule noch verwendet wird.

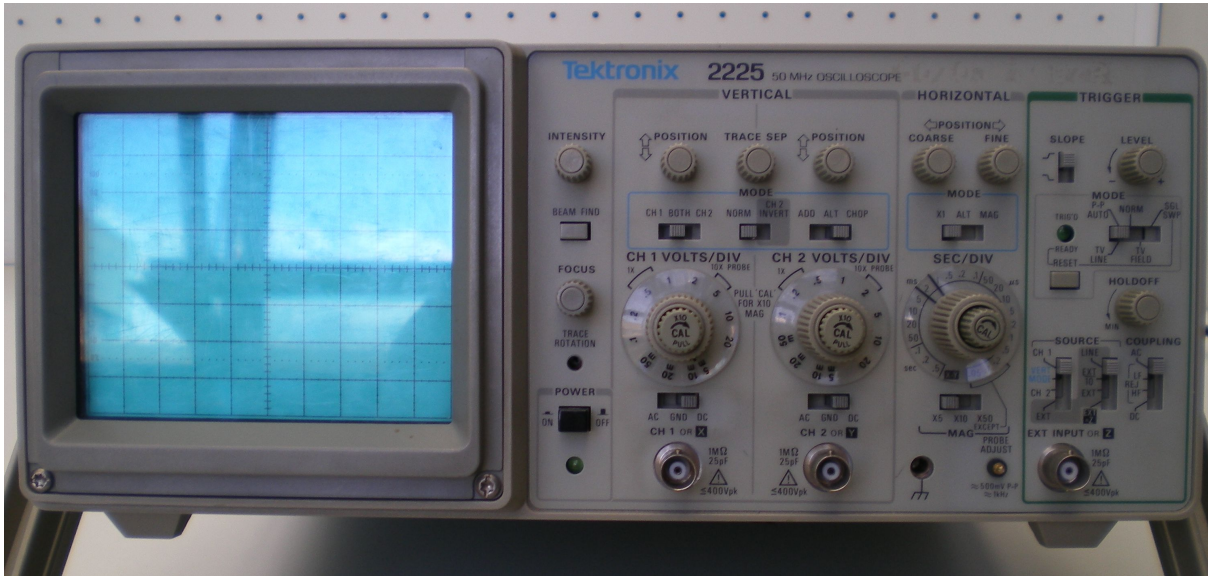


Abbildung 5.2: Analogoszilloskop

### Wichtige Kenngrößen:

Ein Analogoszilloskop wird durch die folgenden wichtigen Kenngrößen charakterisiert:

- **Kanalzahl:** Wie viele Spannungen können gleichzeitig gemessen werden?
- **Bandbreite:** Spannungen mit welcher maximalen Frequenz sind noch messbar?
- **Empfindlichkeit:** Welche minimalen Spannungen sind messbar?
- **Maximale Eingangsspannung:** Welche maximalen Spannungen sind messbar? Spannungswerte können mit verschiedenen Tastköpfen in ihrer Amplitude verändert werden (siehe Kapitel 5.6).

## 5.3 Digitaloszilloskop

Der inzwischen vorherrschende Oszilloskoptyp ist das Digitaloszilloskop. Während des Analogoszilloskop eine rein analoge Signalverarbeitung besitzt, wird im Digitaloszilloskop das Signal digitalisiert, mit einem Computer weiterverarbeitet und dargestellt.

## Blockschaltbild

Das stark vereinfachte Blockschaltbild eines Digitaloszilloskops ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

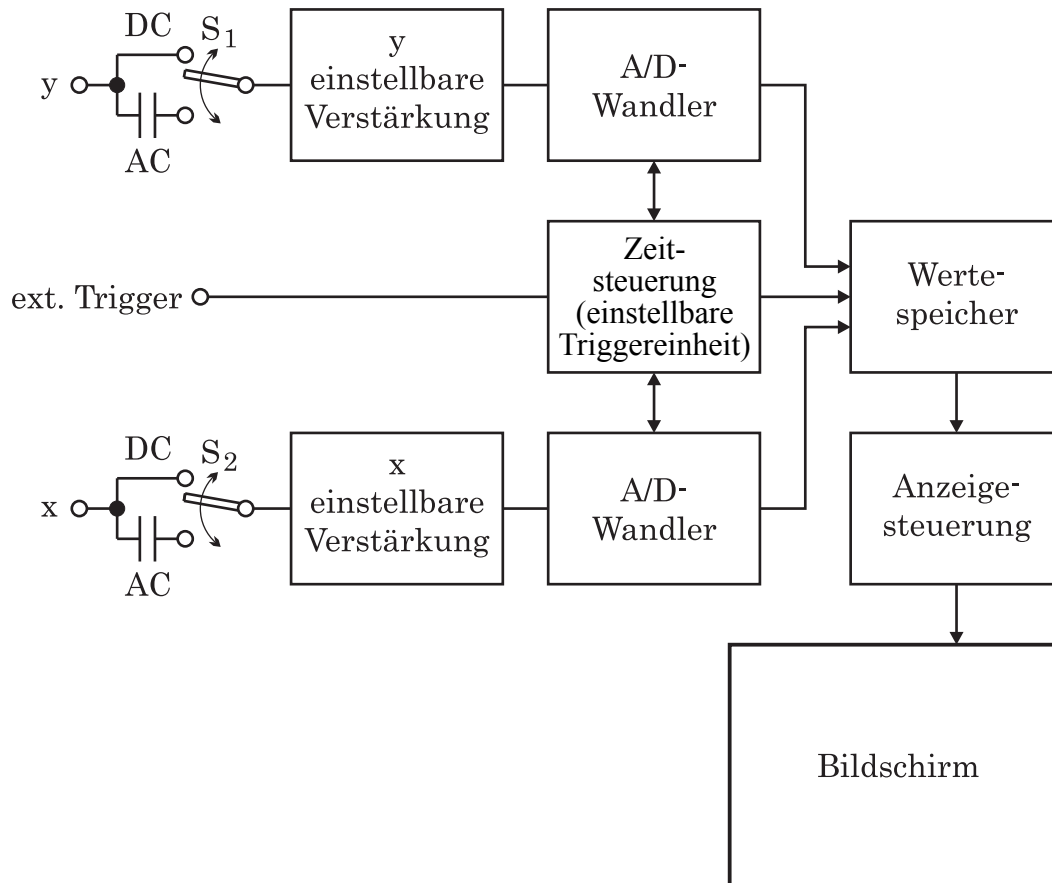


Abbildung 5.3: Blockschaltbild eines Digitaloszilloskops

Wesentliche Bestandteile eines Digitaloszilloskops sind:

- **y-Eingang:**

Die Spannung am y-Eingang wird entsprechend der Stellung des Schalters S<sub>1</sub> im DC-Betrieb (Gleich- und Wechselspannung) oder AC-Betrieb (nur Wechselspannungsanteil) in das Oszilloskop eingekoppelt. In Abhängigkeit vom Messbereich wird die Eingangsspannung verstärkt oder abgeschwächt. Ein nachfolgender A/D-Wandler wandelt die Spannung in einen digitalen Messwert um. Der Wandler wird von der Zeitsteuerung gesteuert.

- **x-Eingang:**  
Die Funktionsweise ist analog zum y-Eingang, nur dass diese Werte für die Abszisse der Darstellung benutzt werden.
- **Zeitsteuerung:**  
Die Zeitsteuerung legt fest, wann die Messdaten von den A/D-Wandlern in den Speicher geschrieben werden. Dadurch wird der Beginn der Messung und die Abtastrate festgelegt. Zur Zeitsteuerung gehört auch eine Triggereinheit, die den Start der Messung festlegt (siehe Kapitel 5.4).
- **Wertespeicher:**  
In den Speicher werden die Messdaten während der Messung geschrieben. Die Größe des Speichers limitiert die Zahl der Messdaten. Die Geschwindigkeit des Speichers muss groß genug sein, um die Daten während der Messung aufzunehmen.
- **Anzeige:**  
Es ist ein Bildschirm ähnlich wie bei einem Computer vorhanden, heute fast immer ein Flachbildschirm. Ein Computer verwaltet die Anzeige der Messkurven incl. Menüs, Berechnungsmöglichkeiten, Möglichkeiten zur Ausgabe und Speicherung der Daten.

### Abtasttheorem von Shannon

Es gibt zwei Kenngrößen bei der Betrachtung der maximalen Frequenz, die ein Digitaloszilloskop noch messen kann:

**Obere Grenzfrequenz:** Dies ist die maximale Frequenz, welche die Verstärker des Oszilloskops noch verarbeiten können. Hier ist die Verstärkung normalerweise um 3dB kleiner als bei Gleichspannung.

**Abtastrate:** Dies ist die Anzahl der Wandlungen, die ein A/D-Wandler in der Sekunde durchführt. Sie wird als Samples pro Sekunde angegeben.

Will man ein Signal einer bestimmten Frequenz  $f_0$  digitalisieren, so muss die Abtastrate gemäß dem Abtasttheorem von Shannon mindestens die doppelte Frequenz

$$f_{\text{Abtast}} \geq 2 \cdot f_0 \quad (5.1)$$

der zu bestimmenden Frequenz haben.

### Auflösung des A/D-Wandlers

Ein A/D-Wandler kann nur eine begrenzte Anzahl von Werten darstellen. Dies limitiert die Auflösung des Oszilloskops. Je größer die Anzahl der Werte ist, desto

aufwändiger wird der Wandler bzw. desto langsamer wird er. Da die Oszilloskope besonders schnell sein müssen, besitzen die A/D-Wandler nur eine geringe Anzahl an Bits (Anzahl von Ausgangswerten).

Oft haben A/D-Wandler von Oszilloskopen eine Auflösung von 8 Bits oder weniger

## 5.4 Triggerung

Bei der Messung einer Spannung mit einem Oszilloskop werden unzählige Bilder in sehr kurzer Zeit auf dem Bildschirm überlagert. Das Auge nimmt aufgrund seiner Trägheit nur die Überlagerung aller Bilder wahr.

Um ein stehendes Bild mit einer Kurvenform zu sehen, ist es nötig, dass alle Bilder phasenrichtig überlagert sind. Dazu muss das Oszilloskop ein Signal bekommen, wann der Aufbau eines neuen Bildes gestartet werden soll.

Diese Aufgabe übernimmt die Triggereinheit. Sie besteht im wesentlichen aus einem Komparator, der die augenblickliche Spannung am Eingang mit der Triggerschwelle vergleicht.

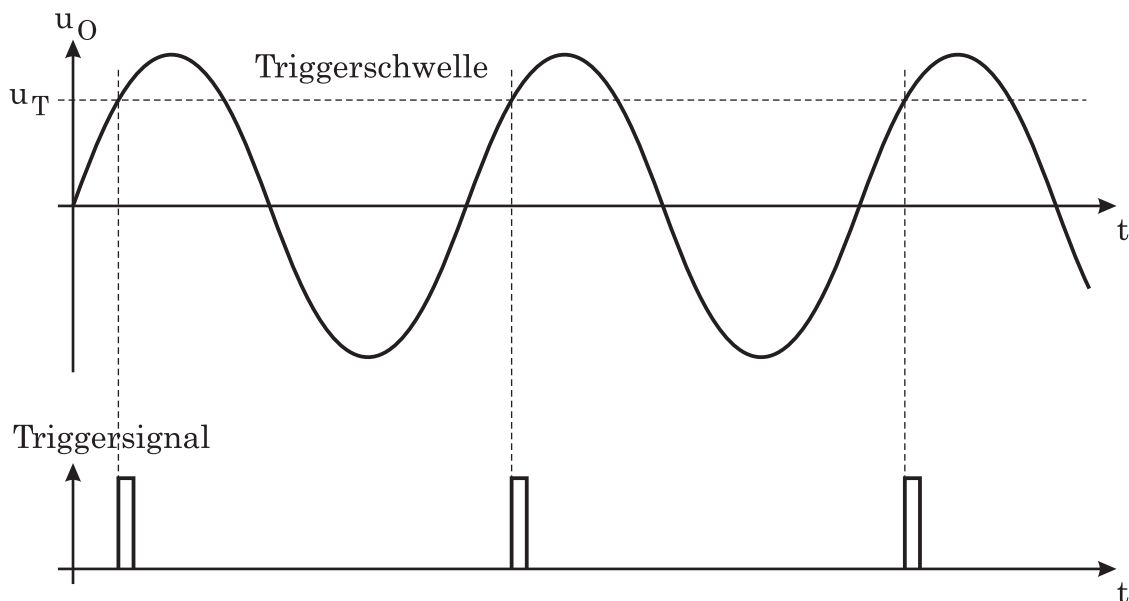


Abbildung 5.4: Triggerung eines Oszilloskops

In Abbildung 5.4 ist der Vorgang der Triggerung schematisch dargestellt. Ist das Oszilloskop mit der Darstellung des vorhergehenden Bildes fertig und wird der Trigger ausgelöst, so beginnt das Oszilloskop mit der Darstellung des neuen Bildes.

Die Triggerschwelle kann ausgelöst werden durch Überschreiten (steigende Flanke) oder Unterschreiten (fallende Flanke) eines bestimmten Spannungswertes. Folgende Einstellmöglichkeiten sind üblicherweise möglich:

**Interne Triggerung:**

Der Trigger wird von einer internen Spannung ausgelöst. Diese kann bei den meisten Oszilloskopen die Spannung eines beliebigen Eingangskanals sein (Quelle).

**Externe Triggerung:**

Der Triggerzeitpunkt wird von einem extern eingespeisten Signal abgeleitet.

**Netz:**

Das Triggersignal wird von der 50Hz Netzspannung abgeleitet.

**Flanke:**

Zusätzlich zum Wert der Triggerschwelle wird die Richtung des Signals ausgewertet, z. B. „steigend“, „fallend“, „Puls“, etc.

**Kopplung:**

Das Triggersignal kann AC- oder DC-gekoppelt werden um Mischsignale präziser triggern zu können (s. Kap. 5.5.4).

**HF/NF:**

Das Eingangssignal wird mittels Tief- bzw. Hochpass gefiltert bevor es der Triggerschaltung zugeführt wird. Damit können z. B. stark verrauschte Signale besser getriggert werden.

## 5.5 Messverfahren

### 5.5.1 yt–Betrieb

Die am meisten benutzte Betriebsart bei Oszilloskopen ist der yt–Betrieb. Dabei wird auf der Abszisse die Zeit dargestellt und auf der Ordinate die Eingangsspannung. Mit diesem Messverfahren wird der Zeitverlauf einer Spannung am Oszilloskop dargestellt.

In Abbildung 5.5 ist der Aufbau des Oszilloskopbildes beim yt–Betrieb dargestellt. Nach dem hier nicht dargestellten Triggerimpuls startet der Sägezahngenerator, der die x–Position des Messpunktes festlegt. Während der Vorlaufzeit werden die Messpunkte auf dem Bildschirm dargestellt. Während der Rücklaufzeit, die nur beim Analogoszilloskop auftritt, ist der Strahl unsichtbar. Die x–Position ist proportional zu der Zeit, die seit dem Triggerzeitpunkt vergangen ist.

Die y–Position ist proportional zur Eingangsspannung.



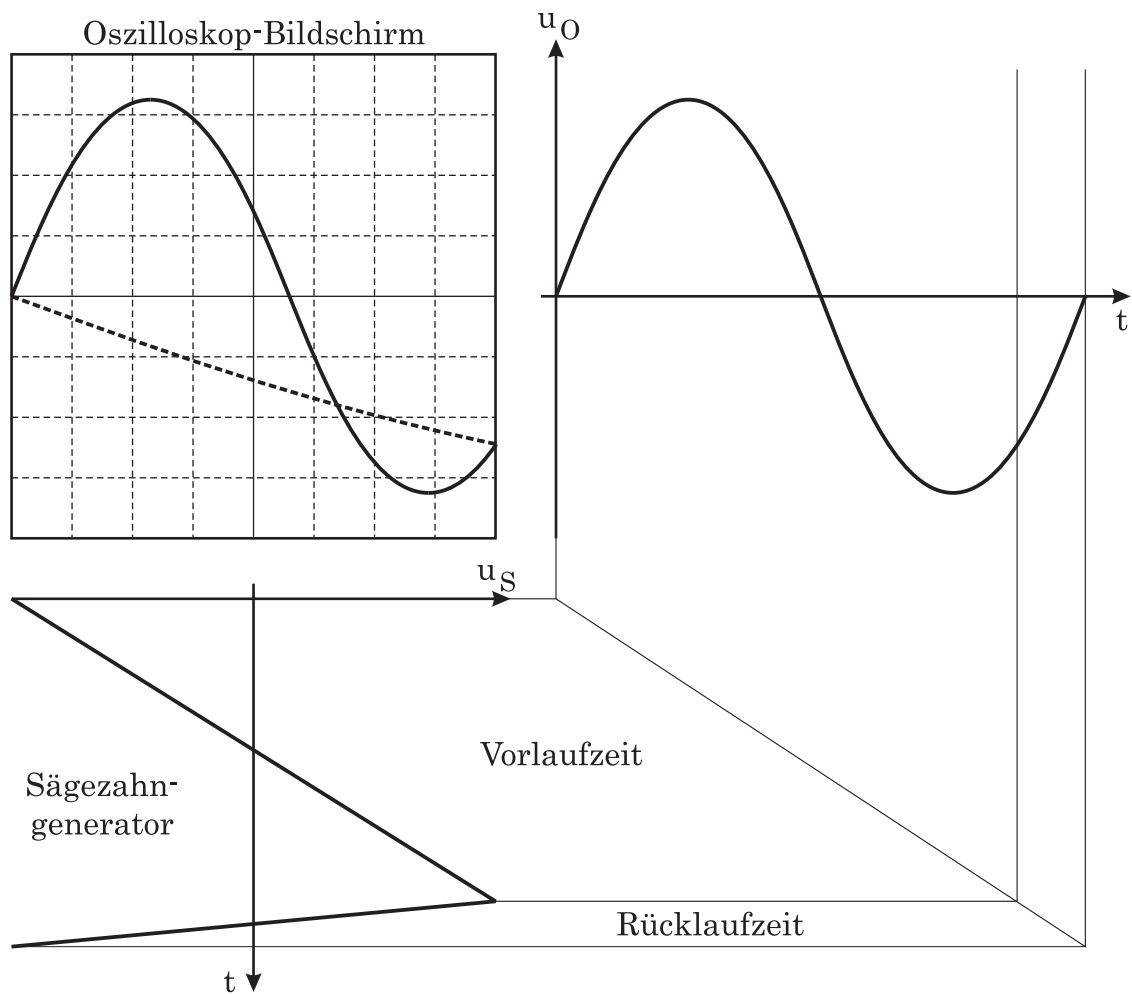


Abbildung 5.5: Aufbau eines yt-Oszillogramms

## 5.5.2 Strommessung

Das Oszilloskop kann nur Spannungen darstellen, weshalb zur Strommessung der Strom in eine Spannung umgewandelt werden muss.

### Strommessung an Shuntwiderstand

Die einfachste Möglichkeit ist die Benutzung eines Shuntwiderstandes  $R_S$ . An diesem fällt, verursacht durch den Strom  $I$ , eine Spannung  $U$  ab, die vom Oszilloskop gemessen werden kann (siehe Abbildung 5.6).

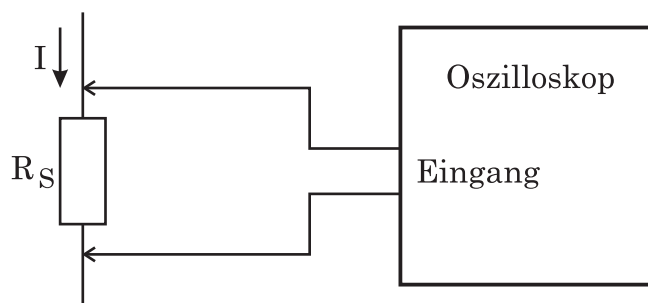


Abbildung 5.6: Strommessung an einem Shuntwiderstand

Der zu messende Strom kann dann mit

$$I = \frac{U}{R_S} \quad (5.2)$$

berechnet werden.

Dieses Messverfahren hat den Vorteil eines sehr einfachen Messaufbaus, zudem muss keine Leitung aufgetrennt werden, sofern ein passender Widerstand bereits in der Schaltung integriert ist. Der Hauptnachteil ist die Verfälschung des Stroms durch den zusätzlichen Widerstand.

### Strommessung über Stromzange

Jeder Strom erzeugt ein Magnetfeld, das gemessen werden kann. Der dafür meist verwendete Sensor ist das Hall-Element, daß auch in Stromzangen eingesetzt wird. Die Spannung am Hallelement (Hallspannung) ist proportional zum durch den Leiter fließenden Strom

$$I \sim B = \mu \cdot H = \mu \cdot \text{const.} \cdot U_H \quad (5.3)$$

$$I \sim U_H \quad (5.4)$$

Die Hallspannung kann vom Oszilloskop gemessen und daraus der Strom ermittelt werden.

In Abbildung 5.8 ist eine Stromzange dargestellt. Das Oszilloskop erkennt automatisch die Stromzange und stellt die Skalierung passend auf den entsprechenden Strombereich ein, so dass keine manuelle Umrechnung erforderlich ist.

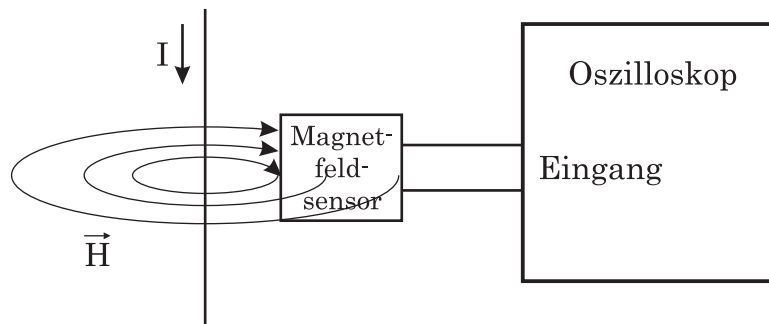


Abbildung 5.7: Strommessung über das Magnetfeld (Stromzange)



Abbildung 5.8: Bild einer Stromzange

Der Vorteil der Strommessung mit Stromzange ist, dass kein zusätzlicher Widerstand in die Schaltung eingefügt werden muß. Der Nachteil ist, dass die Hall-Elemente nur eine begrenzte obere Grenzfrequenz besitzen. Diese ist meist in

MHz-Bereich. Zudem wird eine einzelne Leitung benötigt, die auf Leiterplatten meist nicht vorhanden ist.

Mit Stromzangen sind Strommessungen bis in den Bereich einiger tausend Ampere möglich.

### 5.5.3 Phasenmessung im Zweikanalbetrieb

Das Oszilloskop wird im yt-Betrieb benutzt. Spannung 1 wird an Eingang 1 angelegt, Spannung 2 an Eingang 2. Haben beide Signale zum Beispiel eine Sinusform, so erscheint auf dem Oszilloskop-Bildschirm eine Abbildung wie in Abbildung 5.9 dargestellt.

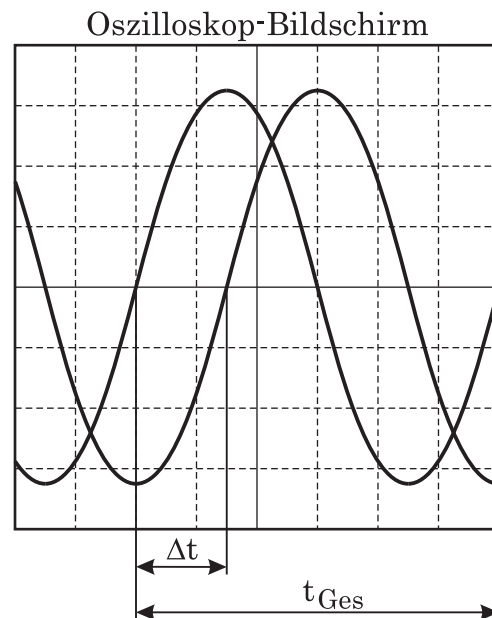


Abbildung 5.9: Phasenmessung zwischen zwei Sinusspannungen im Zweikanalbetrieb

Die Phasendifferenz zwischen beiden am Oszilloskop abgelesenen Spannungen wird gemäß

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta t}{t_{Ges}} \cdot 2\pi \quad (5.5)$$

berechnet. Hierbei ist  $\Delta t$  die Zeitdifferenz zwischen den Nulldurchgängen der beiden Spannungen und  $t_{Ges}$  die Periodendauer.

### 5.5.4 AC - DC Betrieb

In den Blockschaltbildern, die den Aufbau der Oszilloskope beschreiben (Abbildungen 5.1 und 5.3) wird mit den Schaltern S1 und S2 zwischen AC- und DC-Betrieb umgeschaltet.

#### DC-Betrieb:

Die Eingangsspannung wird direkt ins Oszilloskop geleitet, wodurch sowohl Gleich- als auch Wechselspannung auf dem Oszilloskop dargestellt werden. Aufgrund der endlichen Bandbreite der Verstärker besitzt das Oszilloskop eine obere Grenzfrequenz  $f_{OG}$  (siehe Abbildung 5.10a).

#### AC-Betrieb:

Der Eingang wird über den Koppelkondensator ins Oszilloskop geleitet, wodurch die Gleichspannung nicht übertragen wird. Dadurch besitzt das Oszilloskop neben der oberen Grenzfrequenz  $f_{OG}$  auch eine untere Grenzfrequenz  $f_{UG}$  im Bereich einiger Hz (Abbildung 5.10b).

Im AC-Betrieb werden niederfrequente Spannungen nicht gemessen. Hat man Spannungsformen mit diesem Frequenzanteilen, so werden diese verfälscht dargestellt. Misst man „aus Versehen“ im AC-Betrieb, so erhält man verzerrte Messkurven. !

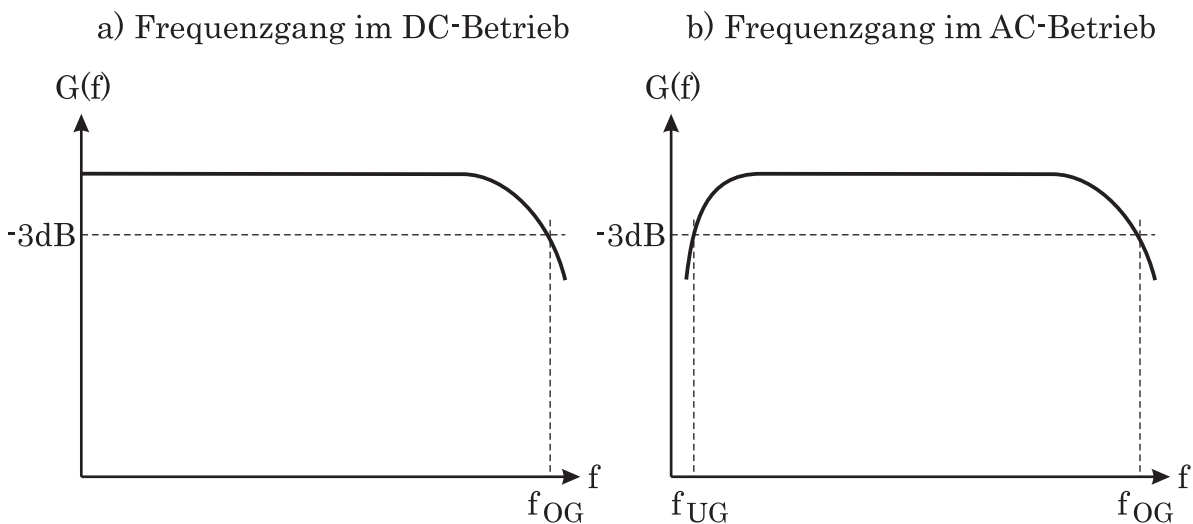


Abbildung 5.10: Grenzfrequenz im DC- und AC-Betrieb

### 5.5.5 Bestimmung der unteren Grenzfrequenz im AC-Betrieb

Die untere Grenzfrequenz im AC-Betrieb ist interessant, um die eben beschriebenen Effekte abschätzen zu können. Die Bestimmung kann prinzipiell auf zwei Arten geschehen:

- **Messung im Frequenzbereich:**

Man legt eine Wechselspannung mit einer Frequenz von einigen kHz an den Oszilloskopeingang an und liest die Spannung am Oszilloskop ab. Nun verringert man die Frequenz bis die angezeigte Spannung am Oszilloskop auf den  $1/\sqrt{2}$ -fachen Wert (-3dB) abgesunken ist. Diese Frequenz ist die untere Grenzfrequenz.

- **Messung im Zeitbereich:**

Man legt ein Rechtecksignal von einigen Hz Frequenz an den Oszilloskopeingang an. Auf dem Bildschirm sieht man aufgrund des Ladevorgangs des Eingangskondensators eine exponentiell abklingende Funktion. Nun misst man die Zeitdauer vom Start der Funktion bis zum  $1/e$ -Punkt, was der Zeitkonstante  $\tau$  entspricht. Die untere Grenzfrequenz ist nun  $f_{gu} = \frac{1}{2 \cdot \pi \tau}$ .

### 5.5.6 Messung von Mischspannungen

Von einer Mischspannung spricht man, wenn die Spannung aus einer Gleichspannung besteht, der eine Wechselspannung überlagert ist. Es soll sowohl der **Gleichspannungsanteil** als auch der **Wechselspannungsanteil** möglichst genau gemessen werden. Dies ist nur mit zwei getrennten Messungen möglich, die in Abbildung 5.11 dargestellt sind.

Der Messablauf ist wie folgt:

1. Spannungskopplung des Oszilloskops auf **DC**: Einstellung der Spannungsempfindlichkeit so, dass die gesamte Spannung auf dem Bildschirm erscheint. Mittelung der Gleichspannung (sofern der Wechselspannungsanteil sichtbar ist) und Messung des Gleichanteils (Abbildung 5.11a).
2. Spannungskopplung des Oszilloskops auf **AC**: Der Gleichspannungsanteil wird unterdrückt und es wird nur der Wechselspannungsanteil auf dem Bildschirm dargestellt. Einstellung der Verstärkung so, dass der Wechselspannungsanteil möglichst bildschirmfüllend dargestellt wird. Messung des Wechselspannungsanteils (Abbildung 5.11b).

### 5.5.7 xy-Betrieb

Die zweite, neben dem yt-Betrieb, wesentliche Betriebsart von Oszilloskopen ist der xy-Betrieb. In diesem Modus wird sowohl am x-Eingang als auch am y-Eingang

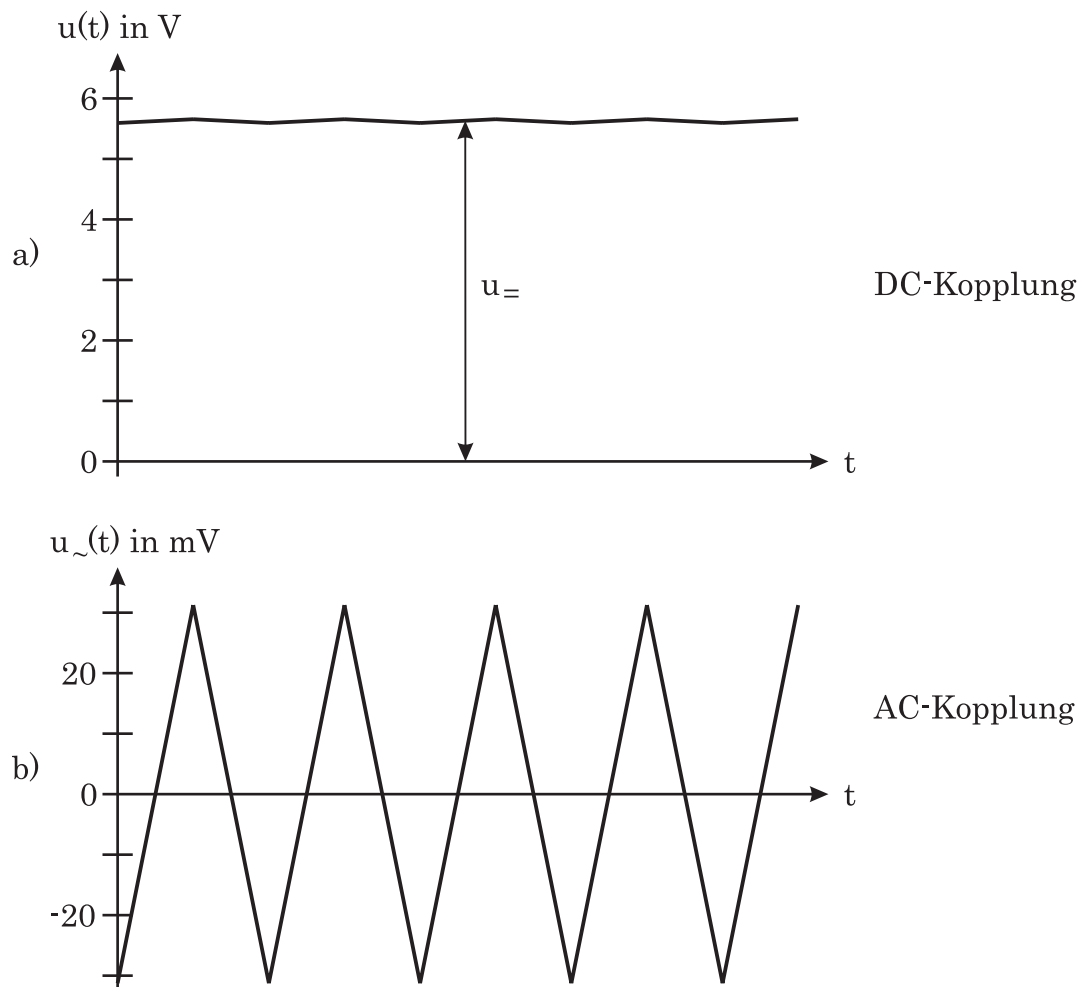


Abbildung 5.11: Messung einer Mischspannung

eine Spannung angelegt, somit ist die  $x$ -Position nicht mehr abhängig von der Zeit, sondern von einer Spannung. In Abbildung 5.12 ist ein Oszillogramm im  $xy$ -Betrieb dargestellt. Die Form der Kurve auf dem Oszilloskop ist von den beiden Spannungen an den Eingängen abhängig. In diesem Beispiel ist sowohl am  $x$ - als auch am  $y$ -Eingang eine Sinusspannung angelegt. Das Oszillogramm ergibt eine Gerade mit einer Neigung von  $45^\circ$ .

### 5.5.8 Kennlinienaufnahme

Eine Anwendung des  $xy$ -Betriebs ist die Kennlinienaufnahme von Bauteilen. In Abbildung 5.13 ist der Schaltplan zur Kennlinienaufnahme zu sehen. Es sind folgende Komponenten vorhanden:

- **Wechselspannungsquelle:** Eine Wechselspannungsquelle liefert die variable Spannung, mit der die Kennlinie des zu messenden Bauteils abgetastet wird.

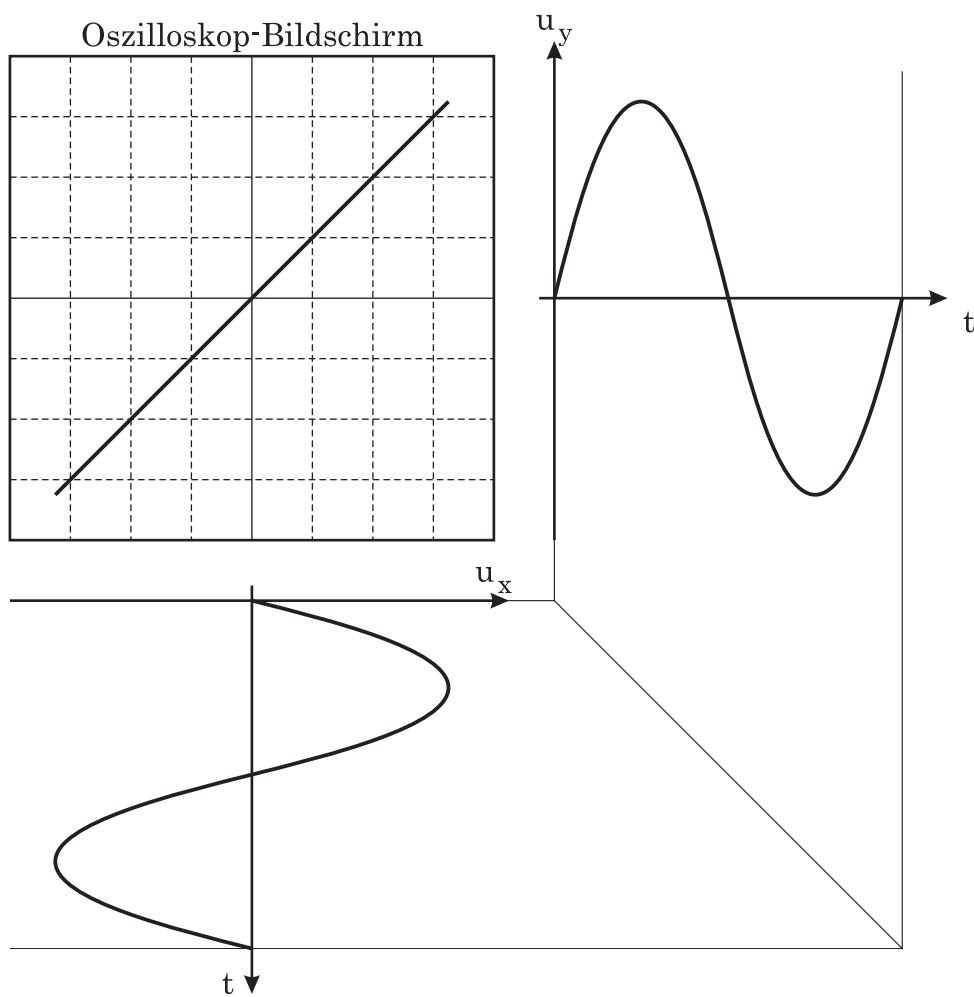


Abbildung 5.12: Aufbau eines xy-Oszillogramms

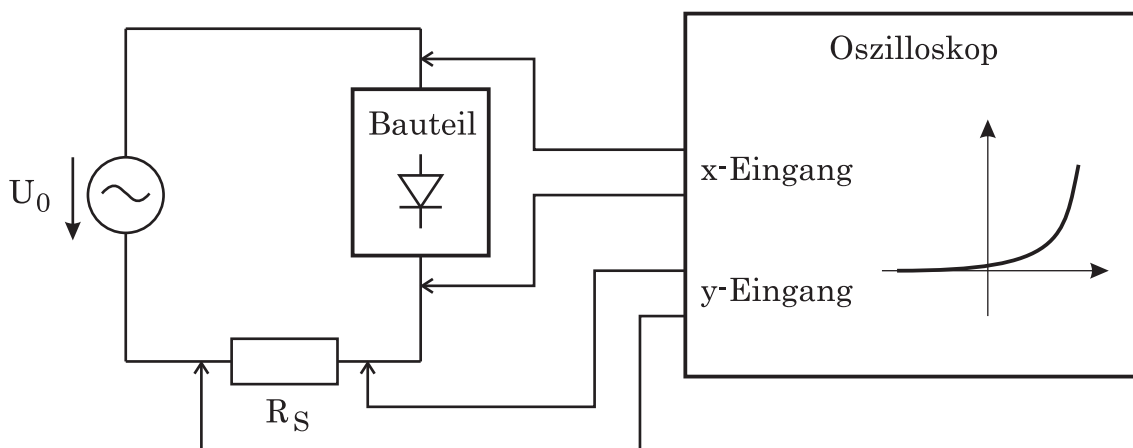


Abbildung 5.13: Schaltung zur Kennlinienaufnahme



- **Spannungsmessung:** Am Bauteil wird die Spannung gemessen. Diese wird auf der x-Achse dargestellt (dies ist die übliche Darstellung, alternativ könnte man sie auch auf der y-Achse darstellen).
- **Strommessung:** An einem Shuntwiderstand wird der Strom durch das Bauteil gemessen (man könnte den Strom auch mit einer Stromzange messen). Der Strom wird auf der y-Achse dargestellt.

Bei den meisten Oszilloskopen haben alle Eingänge eine gemeinsame Masse. Dies ist bei der Messanordnung zu beachten, d. h. in Abb. 5.13 muss der untere x-Eingang und der obere y-Eingang auf dem gemeinsamen Massepotential liegen, da ansonsten eines der Bauteile über das Oszilloskop kurzgeschlossen wird. Daher ist das Signal am y-Eingang invertiert (kann bei den meisten Oszilloskopen durch ein weiteres Invertieren in den Einstellungen des Kanals wieder rückgängig gemacht werden).

Anstelle einer Spannungs-Strom-Messung eines Bauteils kann man auch andere Größen auf dem Oszilloskop darstellen, wie z.B. eine Spannungs-Spannungsmessung für das Übersetzungsverhältnis eines Transformators.

### 5.5.9 Lissajous-Figuren

Eine andere Anwendung des xy-Betriebs ist der Vergleich von zwei Sinusspannungen bezüglich Phase und Frequenz. Dies ist eine alternative Messung zu der in Kapitel 5.5.3 vorgestellten Methode. Eine Spannung wird an den Eingang 1, die andere Spannung wird an den Eingang 2 des Oszilloskops angelegt.

Die Bilder auf dem Oszilloskop-Bildschirm werden nach dem französischen Physiker Jules Antoine Lissajous (1822-1880) Lissajous-Figuren genannt. Er hatte sich damit beschäftigt, Schwingungen eines Fadenpendels, das aus zwei Richtungen angeregt wird, darzustellen.

#### Sinusspannungen gleicher Frequenz mit unterschiedlicher Phasendifferenz

Sind an den beiden Eingängen des Oszilloskops Sinusspannungen mit gleicher Frequenz und einer bestimmten Phasendifferenz vorhanden, so erscheinen auf dem Oszilloskop Lissajous-Figuren gemäß Abbildung 5.14.

Die Figuren sind Ellipsen, deren Halbachsen von der Phasendifferenz der beiden Spannungen abhängig sind. Zur Auswertung der Lissajous-Figuren leitet man folgende Beziehung her.

Dazu nimmt man an, dass die x-Ablenkung durch eine Sinusspannung

$$u_x = \hat{u}_x \cdot \sin(\omega t) \quad (5.6)$$

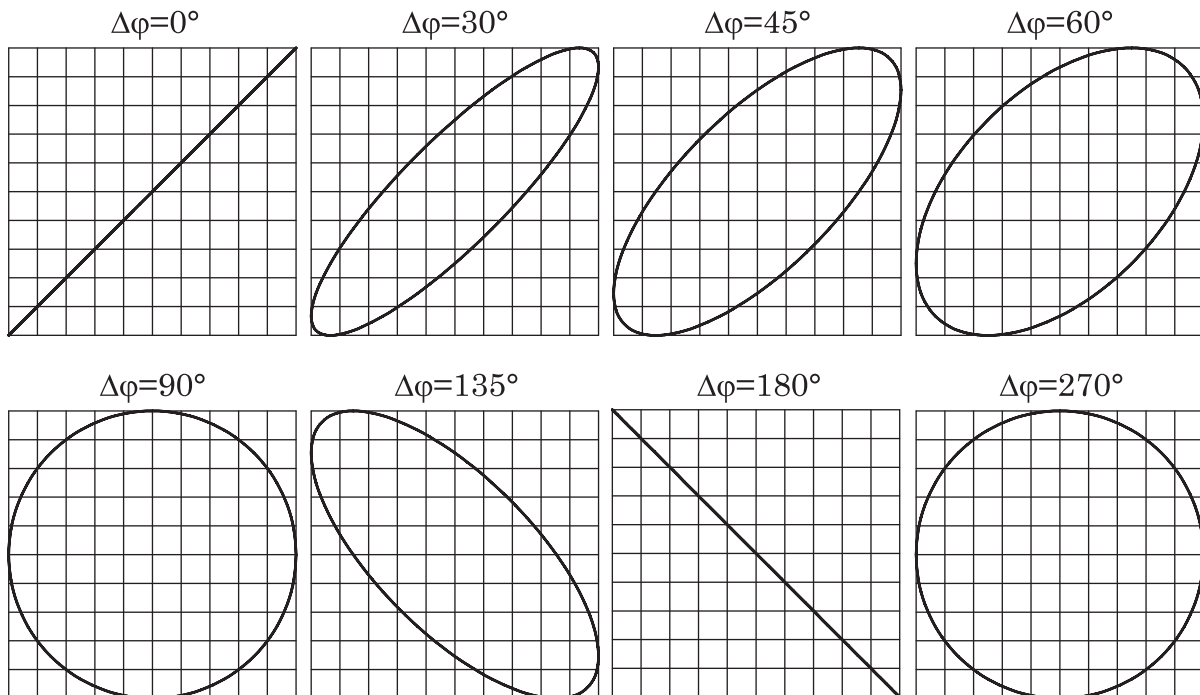


Abbildung 5.14: Lissajous-Figuren zweier Sinusschwingungen gleicher Frequenz und unterschiedlicher Phase

hervorgerufen wird. Die  $y$ -Ablenkung wird durch eine dazu phasenverschobene sinusförmige Spannung

$$u_y = \hat{u}_y \cdot \sin(\omega t + \Delta\varphi) \quad (5.7)$$

erzeugt. Im Nulldurchgang von  $u_x$ , also zum Zeitpunkt  $t = 0$  gilt damit für  $u_y$ :

$$u_y(t = 0, u_x = 0) = \hat{u}_y \cdot \sin(\Delta\varphi) \quad (5.8)$$

Löst man diese Gleichung nach  $\Delta\varphi$  auf, so ergibt sich:

$$\sin(\Delta\varphi) = \frac{u_y(u_x = 0)}{\hat{u}_y} \quad \text{oder} \quad (5.9)$$

$$= \frac{u_x(u_y = 0)}{\hat{u}_x} \quad (5.10)$$

Damit wird

$$\Delta\varphi = \arcsin\left(\frac{u_y(u_x = 0)}{\hat{u}_y}\right) \quad (5.11)$$

Die Funktion  $\arcsin$  ist mehrdeutig. Aufgrund der Ellipsenlage muss man den tatsächlichen Phasenwinkel zwischen den Sinusspannungen feststellen. Dabei können die Lissajous-Figuren gemäß [Abbildung 5.14](#) hilfreich sein.

Wird die Lissajous-Figur im Uhrzeigersinn durchlaufen, so eilt  $u_y$  der Spannung  $u_x$  voraus. Bei entgegengesetzter Drehrichtung ist  $u_y$  nacheilend. Die Drehrichtung kann man visuell nur bei niedrigen Frequenzen feststellen.

### Sinusspannungen unterschiedlicher Frequenz

Liegen an den Eingängen des Oszilloskops Sinusspannungen an, bei denen man das Frequenzverhältnis durch einen Bruch ausdrücken kann, so treten Figuren gemäß Abbildung 5.15 auf.

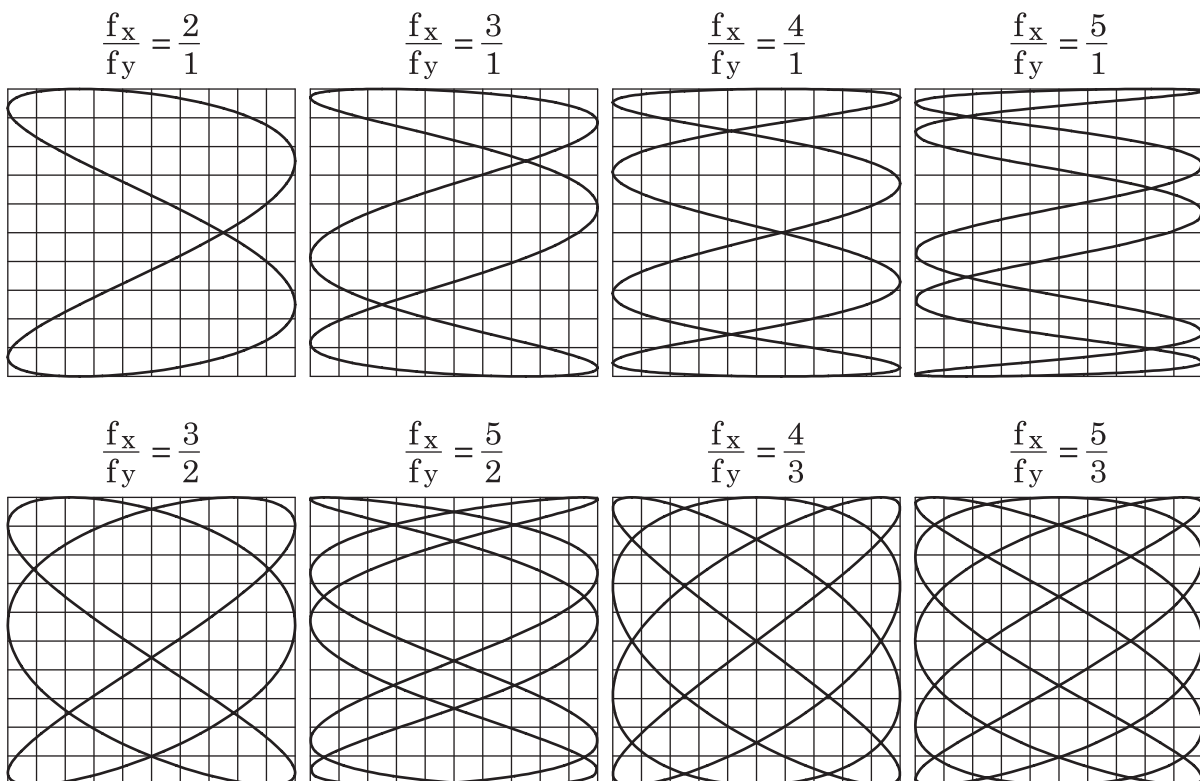


Abbildung 5.15: Lissajous-Figuren zweier Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz

Zur Bestimmung des Frequenzverhältnisses der beiden Spannungen zählt man die Maxima in x-Richtung  $n_x$  und y-Richtung  $n_y$ . Das Frequenzverhältnis ergibt sich dann aus dem Verhältnis der Anzahlen  $n_x$  und  $n_y$

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{n_x}{n_y} \quad (5.12)$$

der Maxima.

In Abhängigkeit vom Phasenwinkel zwischen den beiden Spannungen ändert sich die Gestalt der Lissajous-Figuren, die Anzahl der Maxima bleibt aber unabhängig davon bei einem konstanten Frequenzverhältnis gleich.

## 5.6 Tastkopf

Die Eingangsschaltung des Oszilloskops kann man sich vorstellen als eine Parallelschaltung eines Widerstandes  $R_E$  und eines Kondensators  $C_E$  (Ersatzschaltbild). Diese Schaltung ist ein Tiefpass und begrenzt die Grenzfrequenz des Oszilloskops auf deutlich niedrigere Werte als die nachfolgenden Verstärker.

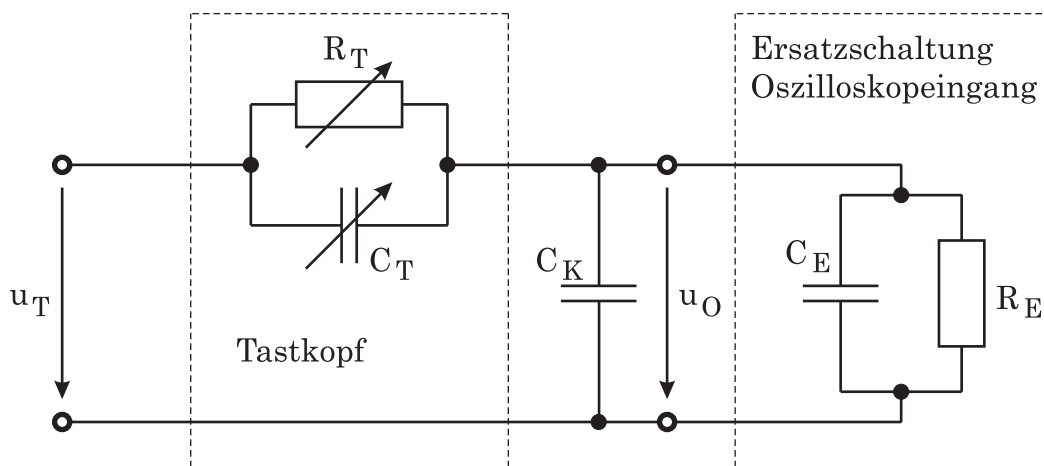


Abbildung 5.16: Schaltplan eines Tastkopfes

Um diesen Tiefpass zu kompensieren, wird ein Tastkopf vor den Eingang des Oszilloskops geschaltet. Abbildung 5.16 zeigt das Schaltbild eines solchen Tastkopfes an einem Oszilloskopeingang. Im Tastkopf befindet sich eine Parallelschaltung eines Widerstandes  $R_T$  und eines Kondensators  $C_T$ , die zusammen mit der Kabelkapazität  $C_K$  und den Eingangsgrößen  $R_E$  und  $C_E$  des Oszilloskops einen Spannungsteiler bilden.

Nun bestimmt man den Widerstand und den Kondensator des Tastkopfes so, dass ein gewünschtes Teilungsverhältnis der Spannung entsteht und der Spannungsteiler unabhängig von der Frequenz wird.

Der Tastkopf und der Oszilloskopeingang bilden einen Spannungsteiler

$$\frac{u_0}{u_T} = \frac{\underline{Z}_E}{\underline{Z}_E + \underline{Z}_T} \quad (5.13)$$

Da sowohl der Tastkopf als auch der Oszilloskopeingang aus einer Parallelschaltung von Kondensator und Widerstand bestehen, ist die Rechnung unter Benutzung von Leitwerten einfacher:

$$\frac{u_0}{u_T} = \frac{\underline{Z}_E}{\underline{Z}_E + \underline{Z}_T} = \frac{\frac{1}{\underline{Y}_E}}{\frac{1}{\underline{Y}_E} + \frac{1}{\underline{Y}_T}} = \frac{\underline{Y}_T}{\underline{Y}_T + \underline{Y}_E} . \quad (5.14)$$

Setzt man nun die entsprechenden Größen ein, so ergibt sich

$$\frac{u_0}{u_T} = \frac{\frac{1}{R_T} + j\omega C_T}{\frac{1}{R_T} + j\omega C_T + \frac{1}{R_E} + j\omega C} \quad (5.15)$$

mit

$$C = C_E + C_K . \quad (5.16)$$

Dieser Spannungsteiler soll frequenzunabhängig sein, nur so wird der Eingang des Oszilloskops breitbandig!

Aus der Forderung nach Frequenzunabhängigkeit folgt, dass die Ableitung von (5.15) nach der Frequenz gleich Null ist

$$\frac{\partial \left( \frac{u_T}{u_0} \right)}{\partial j\omega} = 0 . \quad (5.17)$$

Mit der Quotientenregel folgt daraus

$$0 = \frac{-\left( \frac{1}{R_T} + j\omega C_T \right) (C_T + C) + C_T \left( \frac{1}{R_T} + j\omega C_T + \frac{1}{R_E} + j\omega C \right)}{\left( \frac{1}{R_T} + j\omega C_T + \frac{1}{R_E} + j\omega C \right)^2} . \quad (5.18)$$

Der Zähler in (5.18) muss gleich Null sein, damit der gesamte Term gleich Null wird. Nach Ausmultiplizieren folgt

$$\frac{C_T}{R_T} + j\omega C_T^2 + \frac{C_T}{R_E} + j\omega C C_T = \frac{C_T}{R_T} + \frac{C}{R_T} + j\omega C_T^2 + j\omega C_T C \quad (5.19)$$

$$\frac{C_T}{R_E} = \frac{C}{R_T} \quad (5.20)$$

und damit die Abgleichbedingung

$$\Rightarrow \boxed{C_T R_T = C R_E} \quad (5.21)$$

die der Tastkopf erfüllen muss, damit der Oszilloskopeingang frequenzunabhängig wird.

In der Praxis geht man bei der Dimensionierung eines Tastkopfes wie folgt vor: Man betrachtet den Tastkopf bei Gleichspannung. Da das Teilungsverhältnis unabhängig von der Frequenz sein soll, muss dieses auch bei Gleichspannung gelten. Alle Kondensatoren werden nun Unterbrechungen und man kann den Widerstand im Tastkopf über den Spannungsteiler ausrechnen.

Nun kann man den erhaltenen Widerstandswert in (5.21) einsetzen und den Kondensator im Tastkopf ausrechnen.

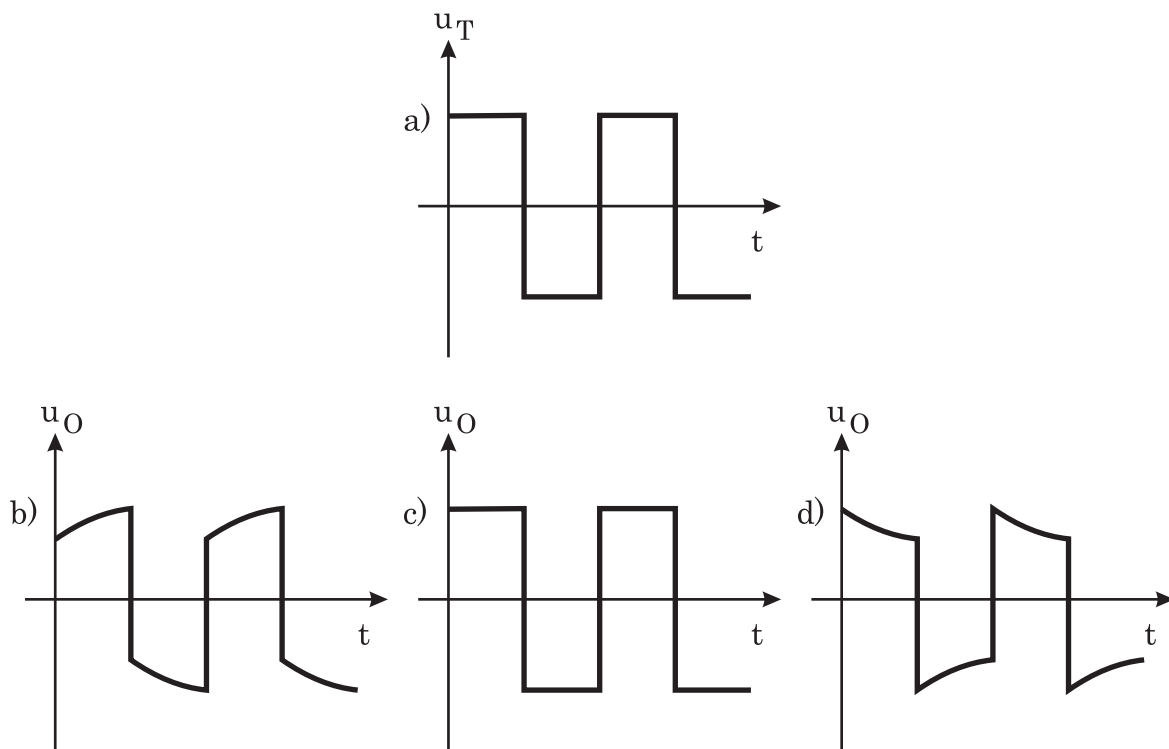


Abbildung 5.17: Einstellung des Tastkopfes zur Frequenzgangkompensation

In Abbildung 5.17 wird der Einfluss der Tastkopfkomensation auf die Anzeige des Oszilloskops dargestellt. In Abbildung 5.17a) ist eine Rechteckspannung am Eingang des Tastkopfes zu sehen.

Ist der Tastkopf unterkompensiert (Kapazität im Tastkopf zu klein), so stellt der Eingang des Oszilloskops einen Tiefpass dar und auf dem Schirm ist eine Spannung wie in Abbildung 5.17b) zu sehen.

Bei richtiger Kompensation wird die Rechteckspannung korrekt auf dem Oszilloskop dargestellt (Abbildung 5.17c) ).

Ist die Kapazität um Tastkopf zu groß, so ist der Tastkopf überkompensiert und wirkt als Hochpass (siehe Abbildung 5.17d) ).



Abbildung 5.18: Tastkopf

In Abbildung 5.18 ist das Exemplar eines Tastkopfes von Tektronix zu sehen. Dieser hat ein Teilungsverhältnis von 10 : 1, d.h. eine Spannung von 10V am Eingang des Tastkopfes wird in eine Spannung von 1V am Eingang des Oszilloskops heruntergeteilt.

Das Oszilloskop misst die Spannung an seinem Eingang. Durch den vorgeschalteten Tastkopf wird die Spannung heruntergeteilt, so dass nur noch ein Bruchteil der Spannung am Oszilloskopeingang anliegt. Entsprechend muss man die auf dem Oszilloskop angezeigte Spannung umrechnen.

Moderne Oszilloskope erkennen den Tastkopf automatisch und führen die Umrechnung der Spannung intern durch. Auf dem Bildschirm erscheint die am Tastkopf anliegende Spannung.

## 5.7 Messfehler

Bei der Verwendung eines Oszilloskops können folgende wesentliche Messfehler auftreten:

## Messfehler bei allen Oszilloskopen

- **Verstärkungsfehler:** Vom Eingang des Oszilloskops bis zur Anzeige sind eine große Anzahl von Bauteilen vorhanden. Diese haben Toleranzen, die sich in einem statischen Verstärkungsfehler des angezeigten Wertes auswirken. Dieser Fehler ist sowohl für die Vertikal- als auch für die Horizontalablenkung vorhanden.
- **Linearitätsfehler:** Nichtlinearitäten in den Verstärkern und bei Analogoszilloskopen im Ablenksystem führen zu einem Linearitätsfehler. Dieser äußert sich darin, dass der Zusammenhang zwischen der Eingangsspannung und der Position auf dem Bildschirm nichtlinear ist.
- **Dynamische Fehler:** Der Eingangswiderstand ist aufgrund der Parallelschaltung von R und C frequenzabhängig. Bei Spannungsquellen mit hohem Innenwiderstand macht sich dies bemerkbar. Bei hohen Frequenzen sinkt der Eingangswiderstand des Oszilloskops und damit auch die angezeigte Spannung.
- **Fehler der Zeitbasis:** Der Sägezahngenerator bei einem Analogoszilloskop bzw. die Zeitbasis des A/D-Wandlers bei einem Digitaloszilloskop ist fehlerbehaftet. Entsprechend dieses Fehlers hat auch die Zeitskala der Anzeige einen Fehler.
- **Verstärkergrenzfrequenz  $f_G$ :** Die Oszilloskop-Verstärker enthalten RC-Glieder, die zu einem Tiefpassverhalten führen. Dadurch werden senkrechte Flanken eines Eingangssignals nicht als senkrechte Linie, sondern mit einer gewissen Anstiegszeit  $t_{An}$  dargestellt. Als Richtwert für die Anstiegszeit gilt:

$$f_G \cdot t_{An} \approx 0,35 . \quad (5.22)$$

Bei der oberen Grenzfrequenz ist die Verstärkung um 3 dB im Vergleich zum Maximalwert gesunken. Dadurch wird nur noch  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  des Wertes angezeigt.

## Zusätzliche Messfehler bei Analogoszilloskopen

- **Parallaxenfehler:** Schaut man schräg auf die Anzeige, so erscheint die Skala gegenüber der Kurve verschoben. Dieser Effekt entsteht, wenn zwischen dem Leuchtschirm und der Skala eine gewisse Distanz vorhanden ist.
- **Ablesefehler durch endliche Strahldicke:** Der Strahl auf dem Bildschirm besitzt eine gewisse Dicke. Diese kann man durch die Fokuseinstellung minimieren. Für eine genaue Messung muss man die Mitte des Strahls durch Schätzung bilden.



### Zusätzliche Messfehler bei Digitaloszilloskopen

- **Aliasing:** Gelangen Spannungen mit Frequenzen größer als die halbe Abtastrate auf den A/D-Wandler, so werden diese am Ausgang als scheinbare Spannungen niedrigerer Frequenz dargestellt. Diesen Effekt kann man verhindern, indem man vor den A/D-Wandler ein Tiefpassfilter mit einer passenden Grenzfrequenz schaltet.
- **Quantisierungsfehler:** Der A/D-Wandler besitzt nur eine endliche Auflösung. Die Eingangsspannung wird quantisiert, d.h. jedem Spannungsintervall wird ein Ausgangswert zugeordnet. Dadurch entsteht ein zusätzlicher Messfehler.

### Beispiel eines Oszilloskopdatenblatts

In Abbildung 5.19 ist der Ausschnitt eines Datenblatts einer Oszilloskop-Familie zu sehen. In diesem Datenblatt findet man die beschriebenen Charakteristiken eines Oszilloskops wieder.

Specifications	WaveJet 314	WaveJet 312	WaveJet 324	WaveJet 322
Bandwidth	100 MHz		200 MHz	
Rise Time	3.5 ns		1.75 ns	
Input Channels	4	2	4	2
Display	7.5" Color flat-panel TFT-LCD, 640 x 480 VGA			
Sampling Rate (single-shot)	1 GS/s		2 GS/s	
Sampling Rate (RIS)	100 GS/s			
Peak Detect Period	1 ns			
Memory Length	500 kpts/Ch (all channels)			
Capture Time	500 $\mu$ s at 1 GS/s, 250 $\mu$ s at 2 GS/s			
Vertical Resolution	8 bit			
Vertical Sensitivity	2 mV/div–10 V/div			
Vertical (DC) Gain Accuracy	$\pm$ (1.5% + 0.5% of full scale)			
BW Limiting Filters	20 MHz			
Maximum Input Voltage	400 V CAT I			
Input Coupling	GND, DC 1 M $\Omega$ , AC 1 M $\Omega$			
Input Impedance	1 M $\Omega$ $\pm$ 1.5%    20 pF			
Probing System	BNC with Probe Sense Ring			
Probes	PP010 (One per Channel)			
Timebase Range	5 ns/div–50 s/div		2 ns/div–50 s/div	
Roll Mode	50 ms/div–50 s/div (100 kS/s maximum)			
Timebase Accuracy	10 ppm (typical)			
<b>Triggering</b>				
Triggers	Edge, Glitch, Period, Pulse Count, TV			

Abbildung 5.19: Ausschnitt der Spezifikation eines Oszilloskops

## 5.8 Spezielle Oszilloskope

Für besondere Anwendungen gibt es spezielle Oszilloskoptypen, von denen einige nachfolgend vorgestellt werden.

### 5.8.1 Sampling-Oszilloskope

Bei der Messung von Spannungen höchster Frequenzen werden Sampling-Oszilloskope benutzt (bis  $f_{max} \approx 100\text{GHz}$ ). Das Problem bei so hohen Frequenzen ist, dass die A/D-Wandler nicht mehr schnell genug arbeiten und auch kein Speicher mit ausreichend hoher Bandbreite zur Aufnahme der Daten zur Verfügung steht.

Aus diesem Grund wendet man das folgende Verfahren an (Abbildung 5.20):

Von einem festen Triggerzeitpunkt aus startend nimmt man pro Messvorgang nur einen Messwert auf, hierbei verändert man jeweils den Zeitraum zwischen Triggerzeitpunkt und Zeitpunkt des Messwertaufnahme.

Durch die Überlagerung zahlreicher Messungen wird die Kurvenform am Eingang des Oszilloskops rekonstruiert.

Dadurch hat man folgende Vor- und Nachteile gegenüber der Messung aller Punkte in einer Periode des Messsignals:

- + Die Abtastrate des A/D-Wandlers ist deutlich verringert, dadurch kann man einen preiswerteren Wandler verwenden. Bei sehr hohen Frequenzen ist der Bau eines ausreichend schnellen A/D-Wandlers technisch nicht möglich.
- + Die Datenrate zum Speicher ist deutlich geringer, dadurch sind billigere und größere Speicher möglich.
- Die Messzeit ist länger, da während jeder Periode der Spannung nur ein Messpunkt aufgenommen wird.
- Ändert sich die Kurvenform der Spannung während der Messung (Eingangssignal ist nicht völlig periodisch), so erhält man Artefakte in der Messkurve, die schwer zu deuten sind und die Messung unbrauchbar machen.

Trotz dieser Nachteile wird das Sampling-Verfahren bei sehr hohen Frequenzen angewendet, da es aufgrund der vorhandenen technischen Möglichkeiten keine andere Verfahrensweise gibt.

### 5.8.2 Digitale Phosphor Oszilloskope

Bei einem Analogoszilloskop besitzt der Phosphor, der durch den Elektronenstrahl zum Leuchten angeregt wird, eine gewisse Nachleuchtzeit. Dadurch sieht man bei periodischen Kurven auch einzelne Spannungsspitzen, die sporadisch vorkommen.

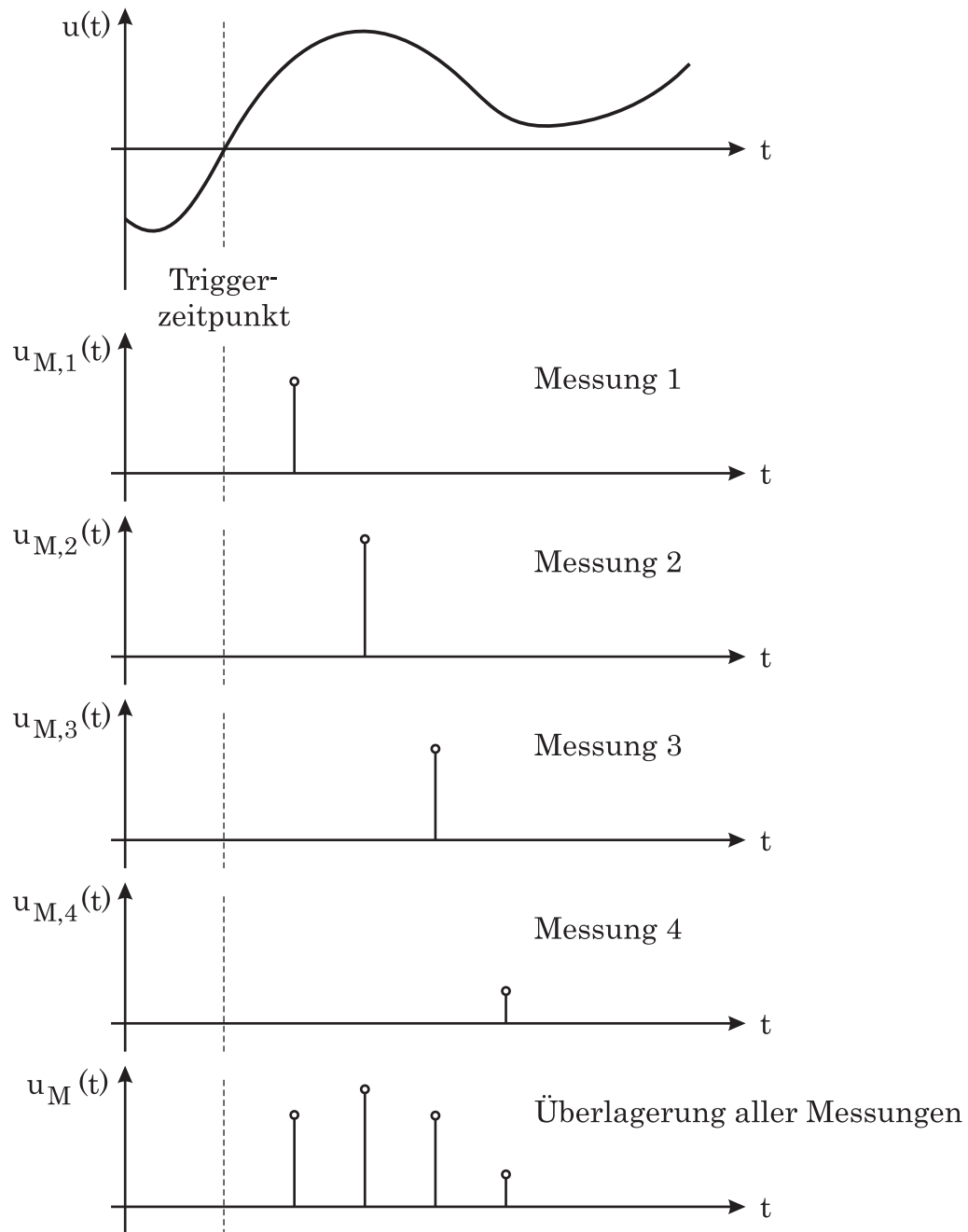


Abbildung 5.20: Messverfahren eines Sampling-Oszilloskops

Diese einzelnen kurzen Signale sieht man bei herkömmlichen Digitaloszilloskopen nicht, da dieses Bild sofort durch das nächste überschrieben wird. Dies ist ein Nachteil, den man bei den „Digitalen Phosphor Oszilloskopen“ eliminiert.

Durch eine spezielle Software werden die letzten gemessenen Kurven auf dem Bildschirm dargestellt. Man erhält einen ähnlichen Bildeindruck wie bei einem Analogoszilloskop. Dadurch werden einzelne Spannungsspitzen länger dargestellt und das Auge kann sie wahrnehmen.

### 5.8.3 Logikanalysatoren

Eine weitere Art des Oszilloskops ist der Logikanalysator. Er wird verwendet, um digitale Signale (z.B. in einem Computer) zu analysieren (Blockschaltbild in Abbildung 5.21).

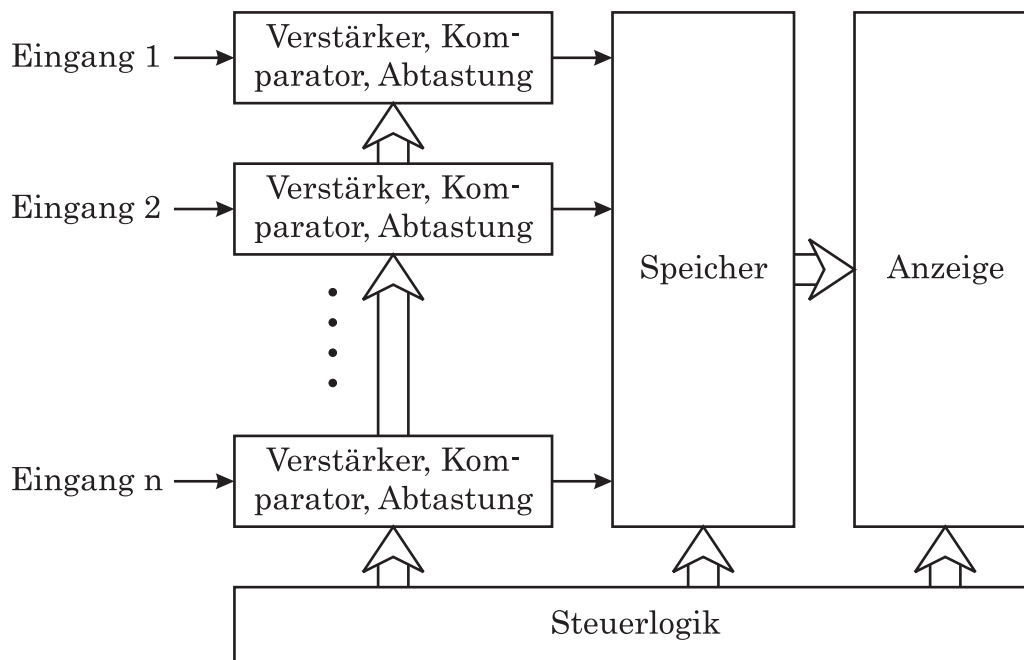


Abbildung 5.21: Blockschaltbild eines Logikanalysators

Bei einem Oszilloskop hat man 2 oder 4 Eingangskanäle, die eine analoge Spannung darstellen. Diese Kanalzahl ist viel zu gering für Computer, bei denen man komplette Busse mit z.B. 16 Bit Breite analysieren will. Dafür benötigt man eine hohe Kanalzahl (z.B. 32, 64 oder mehr).

Dafür ist die Darstellung der Spannung meist uninteressant, man interessiert sich

nur für die logischen Zustände auf den Leitungen. Deshalb sind anstelle von A/D-Wandlern Komparatoren vorhanden, die eine „0“ oder „1“ detektieren.

Die Daten werden in einen Speicher geschrieben und auf einem Bildschirm ausgegeben.

Moderne Geräte können sogar die eingelesenen Daten interpretieren (disassemblieren) und den Start der Messung auf komplexe Muster triggern.

# 6 Zeit, Frequenz, Spektrum

## 6.1 Einleitung

Die Messungen von Zeit, Frequenz und Spektrum sind eng miteinander verwandt. Die Frequenz

$$f = \frac{1}{T_P} \quad (6.1)$$

ist der Kehrwert der Periodendauer  $T_P$ , die die Zeitdauer einer Schwingungsperiode angibt.

Jedes periodische Signal läßt sich als Summe sinusförmiger Signale mit unterschiedlichen Frequenzen darstellen

$$u(t) = \int_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} \hat{u}_\omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_\omega) d\omega . \quad (6.2)$$

Analysiert man dieses periodische Signal, so betrachtet man entweder seine Zeitfunktion mit einem Oszilloskop oder sein Spektrum (Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz) mit einem Spektrumanalysator.

## 6.2 Zeit

### 6.2.1 Messprinzip

Bei der Zeit- und Frequenzmessung gilt immer das in Abbildung 6.1 dargestellte Prinzip.

Die zu messende Zeit wird mit einer Referenzzeit verglichen, welche die geforderte Genauigkeit besitzt. Eine Vergleichseinheit betrachtet die Zeitverhältnisse und gibt einen Wert aus, der einem Vielfachen der Referenzzeit entspricht.

### 6.2.2 Zeitbasen

Als Referenzzeit werden in Abhängigkeit der Anforderungen unterschiedliche Zeitbasen verwendet. Hierbei gibt der Aufwand und die benötigte Genauigkeit der Referenzzeit den Ausschlag für die benutzte Zeitbasis. Nachfolgend werden einige Möglichkeiten zur Erzeugung von Zeitbasen erläutert.

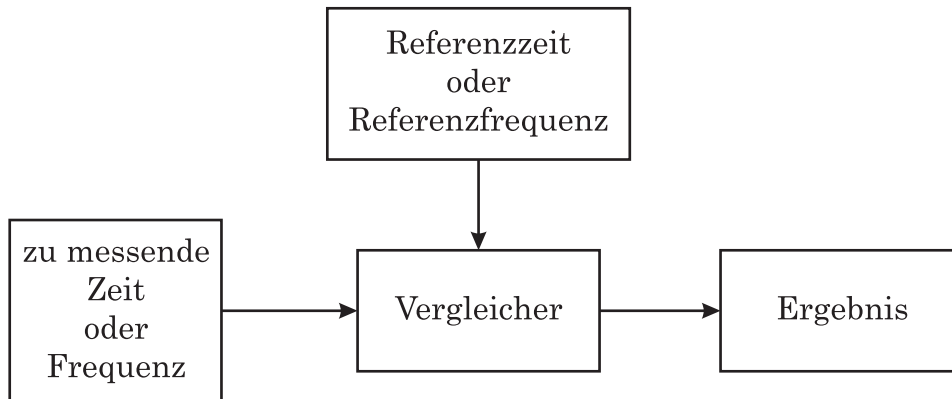


Abbildung 6.1: Prinzip der Zeit- und Frequenzmessung

### 6.2.2.1 Inverterkette

Eine sehr einfache Zeitbasis ist eine Serienschaltung einer ungeraden Anzahl von Invertern. In Abbildung 6.2 sind 3 Inverter in Serie geschaltet.

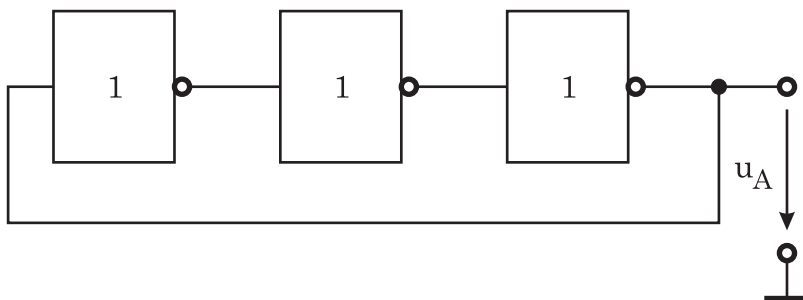


Abbildung 6.2: Inverterkette

Der Ausgang jedes Inverters ist jeweils zum Eingang invertiert. Jeder Inverter besitzt eine gewisse Verzögerungszeit  $t_V$ . Für die Frequenz am Ausgang der Inverterkette gilt

$$f = \frac{1}{2 \cdot n \cdot t_V} \quad (6.3)$$

Diese Zeitbasis ist sehr ungenau, da die Verzögerungszeit der Inverter sehr ungenau ist.



### 6.2.2.2 Astabile Kippstufe

Mit einer sogenannten astabilen Kippstufe läßt sich eine genauere Zeitbasis bereitstellen. Diese elektronische Schaltung kann sich in zwei Zuständen befinden. Sie besteht aus zwei wechselseitig gekoppelten elektronischen Schaltern, die sich gegenseitig umschalten. Die Zeit zwischen den zwei Zuständen ist die gesuchte Zeitbasis. Eine Realisierung einer astabilen Kippstufe mit Transistoren ist in Abbildung 6.3 dargestellt.

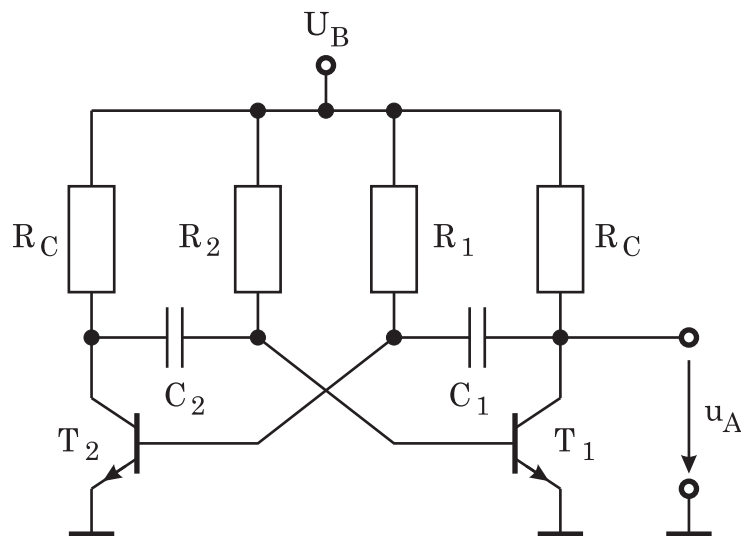


Abbildung 6.3: Astabile Kippstufe

Die beiden Kondensatoren  $C_1$  und  $C_2$  werden wechselseitig geladen und entladen. Diese schalten die beiden Transistoren  $T_1$  und  $T_2$  wechselseitig ein und aus. Die Schaltung liefert ein fast rechteckiges Ausgangssignal. Hierbei ist die Ausschaltzeit  $t_1$  näherungsweise

$$t_1 \approx R_1 \cdot C_1 \cdot \ln(2) \quad (6.4)$$

und die Einschaltzeit  $t_2$  näherungsweise

$$t_2 \approx R_2 \cdot C_2 \cdot \ln(2) \quad (6.5)$$

Durch Veränderung von  $R_1$  oder  $C_1$  kann man die Ausschaltzeit verändern und durch Änderung von  $R_2$  oder  $C_2$  die Einschaltzeit.

Solche analogen Schaltungen lassen sich auch gut simulieren. Zur Simulation gibt es eine Vielzahl von Softwarelösungen. In Abbildung 6.4 wurde die eben erläuterte

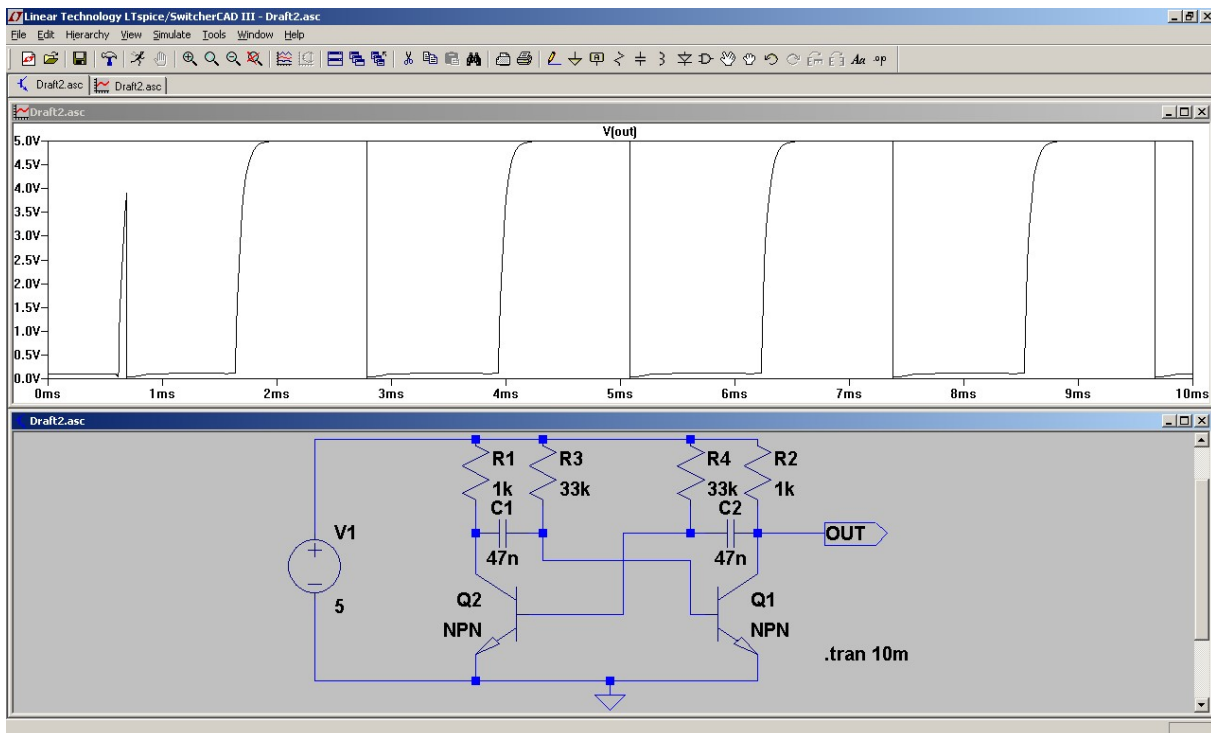


Abbildung 6.4: Astabile Kippstufe mit LTSpice simuliert

astabile Kippstufe mit der Software „LTSpice“ simuliert. Diese Software kann man kostenlos herunterladen.

Sie ist für zahlreiche analogtechnische Probleme geeignet und für die in dieser Vorlesung behandelten Schaltungen sehr zu empfehlen.

Für die Simulation muß zuerst die Schaltung grafisch eingegeben werden. Hierzu gibt es Bibliotheken mit einer großen Anzahl von Bauteilen. Diese werden auf einem virtuellen Board platziert und dann miteinander verbunden. Anschließend werden die Art der Simulation (z.B. Zeitbereich, Frequenzbereich) sowie die Simulationsparameter festgelegt und die Schaltung simuliert. Mittels einer grafischen Ausgabe kann man sich die Verläufe der Spannungen an ausgewählten Punkte der Schaltung anzeigen lassen.

Durch die Simulation spart man sich in der Entwicklung viel Zeit, da nicht jede Schaltung aufgebaut und gemessen werden muss.

Interessierten Studenten wird empfohlen, diese Software gelegentlich zur Simulation analoger Schaltungen auszuprobieren. !

### 6.2.2.3 LC-Oszillator

Wesentlich genauer als astabile Kippstufen sind Oszillatoren, bei denen eine Spule  $L$  kombiniert mit einem Kondensator  $C$  die frequenzbestimmenden Elemente sind. In Abbildung 6.5 ist eine exemplarische Schaltung eines solchen Oszillators dargestellt.

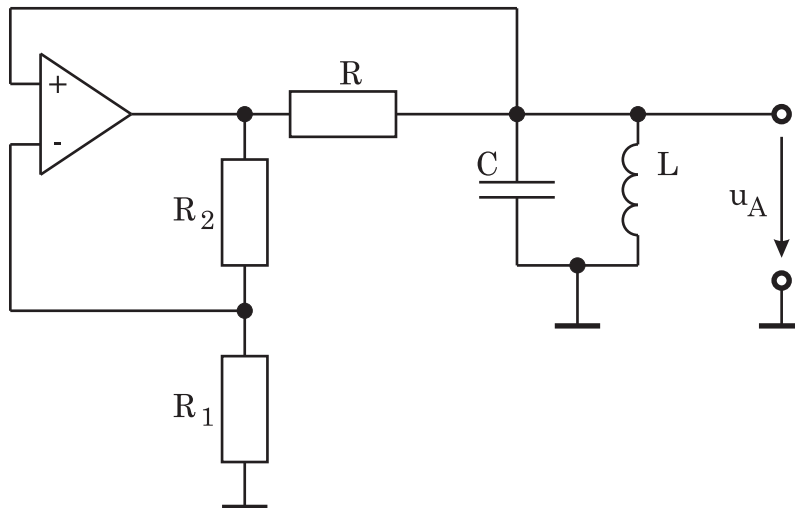


Abbildung 6.5: LC-Oszillator mit Operationsverstärker

Die Oszillatorfrequenz kann mit

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6.6)$$

berechnet werden. Anstelle des Operationsverstärkers in Abbildung 6.5 kann man auch andere verstärkende Elemente, wie z.B. Transistoren benutzen.

### 6.2.2.4 Quarzoszillator

Eine nochmals wesentlich höhere Genauigkeit für die Zeitbasis läßt sich mit einem Quarzoszillator gemäß Abbildung 6.6 erreichen.

Die Frequenz wird durch die Resonanzfrequenz des Schwingquarzes bestimmt. Zur Verstärkung werden die beiden Feldeffekt-Transistoren genutzt.

Betrachtet man den Quarz, so kann man sein Ersatzschaltbild als Reihenschaltung von Spule  $L$  und Kondensator  $C$  darstellen (vergleiche Abbildung 6.7). Diese beiden Elemente bestimmen im wesentlichen die Resonanzfrequenz. Der Widerstand  $R$

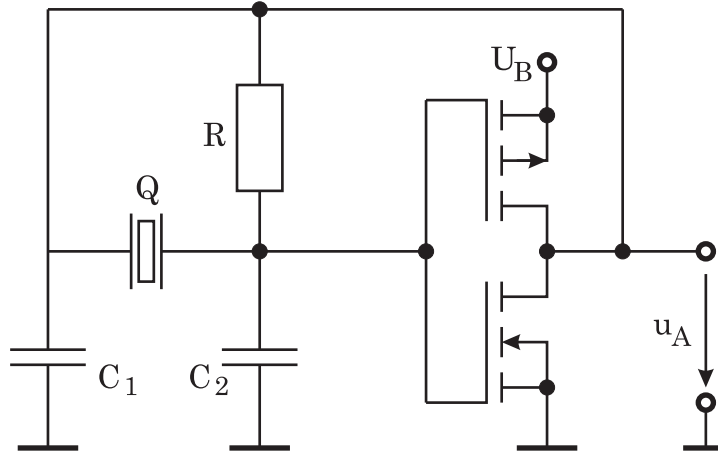


Abbildung 6.6: Quarzoszillator mit Feldeffekt-Transistoren

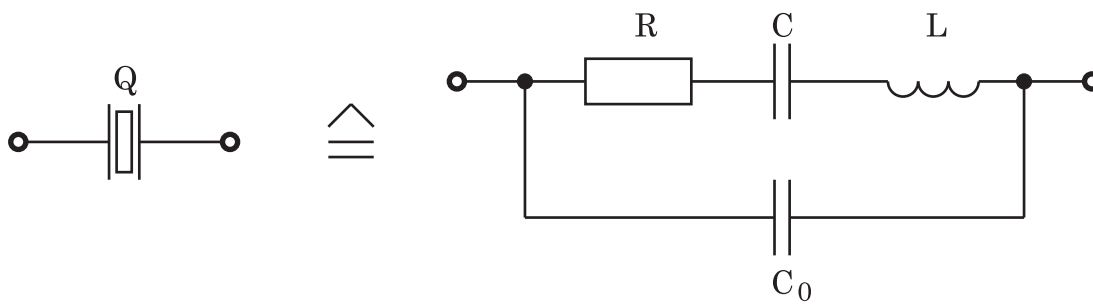


Abbildung 6.7: Ersatzschaltbild des Quarzes

berücksichtigt die Verluste im Quarz, der Kondensator  $C_0$  stellt die Kapazität zwischen den Anschlüssen dar.

Mit dieser Ersatzschaltung und passenden Werten für die Bauteile kann man die Eigenschaften des Quarzes analytisch oder numerisch berechnen.

### 6.2.2.5 Atomuhr

Die zur Zeit genauesten Uhren der Welt sind Atomuhren. Bei ihnen werden isoto-penreine Atome mittels Mikrowellen angeregt. Ist die anregende Mikrowelle iden-tisch mit der Resonanzfrequenz der Atome, so ist die Absorption maximal.

Diese Resonanzfrequenz ist charakteristisch für das eingesetzte Isotop und damit eine hochgenaue und unveränderliche Naturkonstante.

Die Mikrowellenfrequenz wird heruntergeteilt und daraus die Uhrzeit abgeleitet. Für Deutschland wird die amtliche Zeit bei der Physikalisch-Technischen Bundes-anstalt (PTB) in Braunschweig erzeugt. Diese wird über einen Langwellensender in Mainflingen auf der Frequenz 77,5kHz in Mitteleuropa ausgestrahlt.

In Abbildung 6.8 ist das Übertragungsschema des DCF77-Signals dargestellt. Die

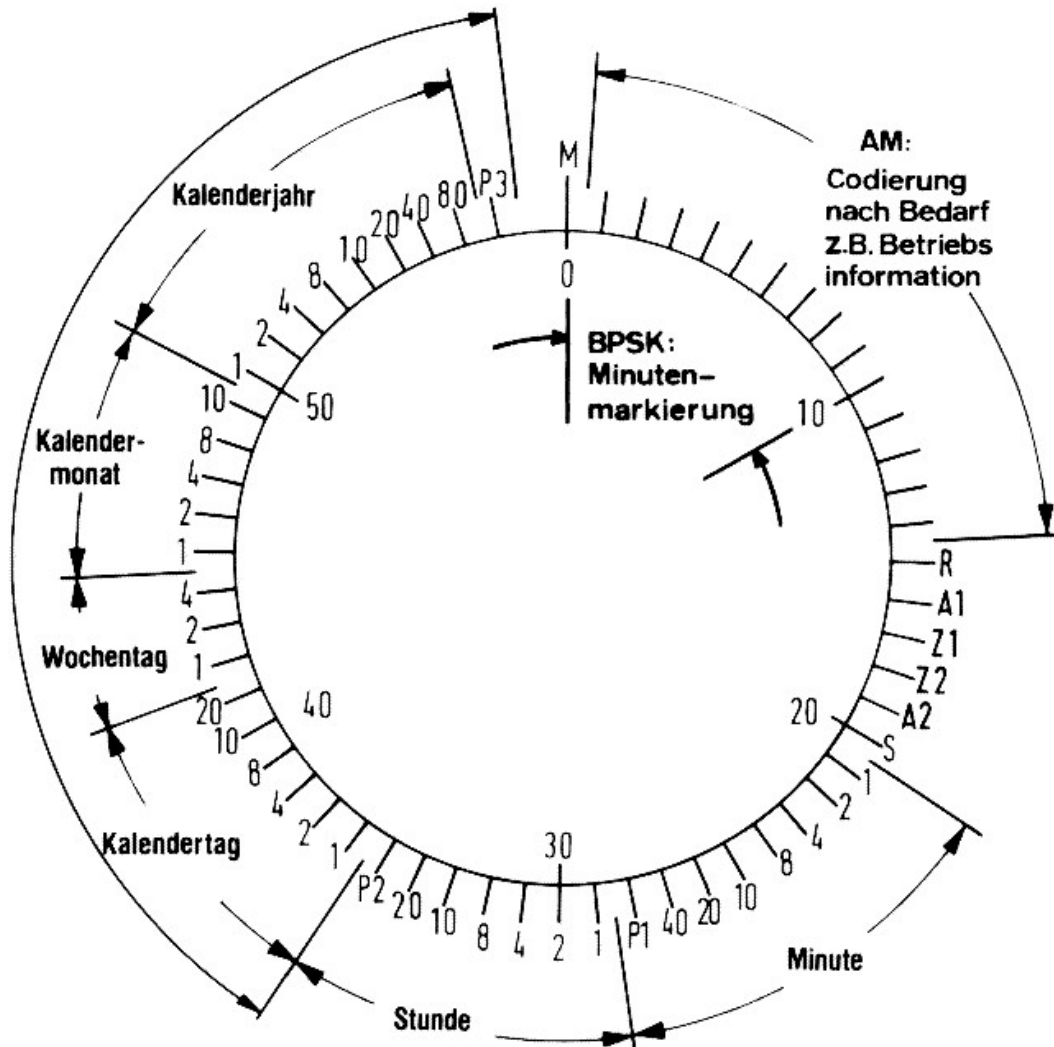


Abbildung 6.8: Übertragungsschema des DCF77 Funksignals

Übertragungsgeschwindigkeit des Zeitsignals beträgt 1 Bit pro Sekunde. Innerhalb einer Minute wird die vollständige Zeitinformation übertragen und jede Minute wiederholt.

Die allgemein erhältlichen Funkuhren werten dieses Signal aus und ermitteln daraus die genaue Zeit.

### 6.2.2.6 Genauigkeiten

Die unterschiedlichen Zeitbasen besitzen unterschiedliche Genauigkeiten. In Tabelle 6.1 sind die ungefähren relativen Fehler der eben dargestellten Verfahren zusammengestellt.

Verfahren	rel. Fehler
Inverterkette	$\approx 10^{-2}$
Astabile Kippstufe	$\approx 10^{-3}$
LC-Oszillator	$\approx 10^{-4}$
Quarz-Oszillator	$\approx 10^{-6} \dots 10^{-9}$
Atomuhr	$\approx 10^{-13}$

Tabelle 6.1: Relative Fehler unterschiedliche Zeitbasen

## 6.3 Frequenz

Es gibt eine große Menge an Verfahren und Geräten zur Frequenzmessung. Hier soll nur auf die grundlegenden Prinzipien der digitalen Frequenzmessung eingegangen werden.

### 6.3.1 Frequenzmessung

Das Prinzip der Frequenzmessung ist in Abbildung 6.9 schematisch dargestellt. Eine Eingangsspannung  $u_E$  mit unbekannter Frequenz wird in eine Rechteckspannung umgewandelt.

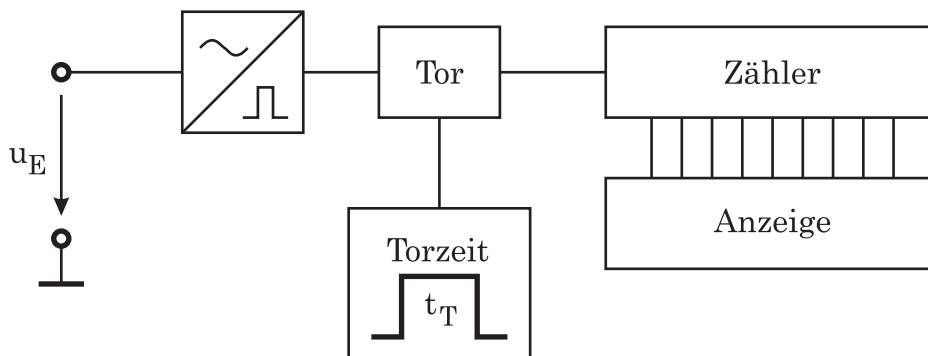


Abbildung 6.9: Blockschaltbild der Frequenzmessung

Diese Rechteckspannung passiert ein Tor, das von einem internen Generator für eine gewisse Zeit  $t_T$  transparent geschaltet wird.

Ein nachgeschalteter Zähler zählt die Anzahl der rechteckförmigen Impulse  $z$ , die von  $u_E$  bei der Passage des Tores ausgelöst werden.

Für die unbekannte Frequenz gilt dann:

$$f_x = \frac{z}{t_T} . \quad (6.7)$$

Dieses Frequenzmessverfahren wird für höhere Frequenzen eingesetzt, da die Genauigkeit mit steigender Zahl von Zählimpulsen steigt.

### 6.3.2 Periodendauermessung

Die Periodendauermessung nutzt das umgekehrte Prinzip zur eben beschriebenen Frequenzmessung.

Das Prinzip der Periodendauermessung ist in Abbildung 6.10 dargestellt. Hier bestimmt man die Periodendauer des unbekannten Signals und rechnet daraus die Frequenz aus.

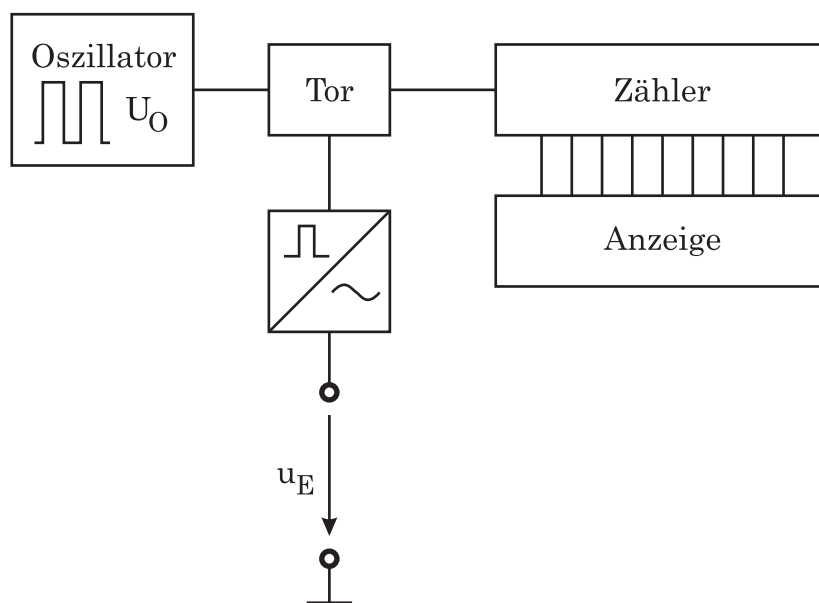


Abbildung 6.10: Blockschaltbild der Periodendauermessung

Nunmehr wird das Tor für eine Periode der unbekanntes Eingangsspannung  $u_E$  transparent geschaltet. Ein Zähler zählt die Anzahl  $z$  der Impulse der internen Referenzspannung  $U_0$  mit der Frequenz  $f_0$ . Für die unbekannte Periodendauer  $t_x$  gilt dann:

$$t_x = z \cdot t_0 \quad (6.8)$$

mit  $t_0$  als Periodendauer der Referenzspannung.

Daraus folgt für die unbekannte Frequenz  $f_x$

$$f_x = \frac{f_0}{z} \quad (6.9)$$

Dieses Verfahren wird für niedrige Frequenzen  $f_x$  bevorzugt benutzt, da dann eine hohe Anzahl von Impulsen gezählt werden muß und damit die Genauigkeit der Messung hoch wird.

## 6.4 Elektrische Spektralanalyse

Die meisten real vorkommenden Wechselspannungssignale bestehen aus einer Überlagerung von sinusförmigen Spannungen unterschiedlicher Frequenzen. Diese werden bei der elektrischen Spektrumanalyse getrennt. Auf dem Schirm erscheinen die einzelnen Teilfrequenzen des Wechselspannungssignals.

### 6.4.1 Messprinzip

Das Messprinzip der elektrischen Spektralanalyse ist in Abbildung 6.11 abgebildet.

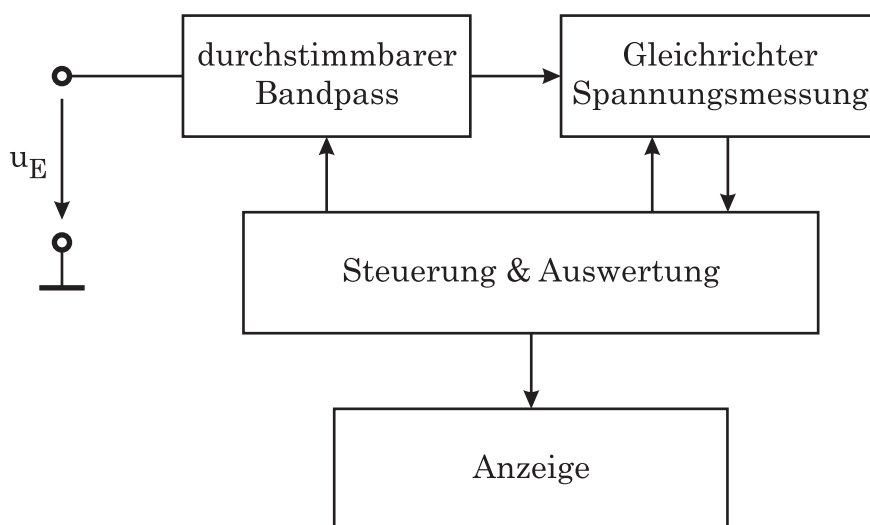


Abbildung 6.11: Prinzip des elektrischen Spektrumanalysators

Aus dem zu messenden Signal  $u_E$  wird mittels eines durchstimmbaren Bandpass-Filters ein schmales Frequenzband herausgefiltert. Dieses wird im nachfolgenden Gleichrichter in eine Gleichspannung umgewandelt und anschließend gemessen.



Eine Steuereinheit verstellt das durchstimbare Filter so, dass von jedem Frequenzbereich ein Messwert aufgenommen wird. Diese Messwerte werden dann meist auf einem Bildschirm grafisch dargestellt.

In Realität sind die Geräte deutlich komplexer aufgebaut. Beispielsweise sind mehrere Filter kaskadiert, um eine geringe Bandbreite und hohe Unterdrückung benachbarter Frequenzen zu erreichen.

Die Realisierung zahlreicher schmaler synchronisierter Filter ist technisch sehr anspruchsvoll und teuer. Aus diesem Grund werden die Filter bei festen Frequenzen realisiert und die Frequenzabstimmung wird mittels eines durchstimbaren Oszillators gemacht, dessen Spannung mit der Eingangsspannung gemischt wird und dadurch die Frequenz der Eingangsspannung auf die Filterfrequenz heruntergesetzt wird.

### 6.4.2 Hersteller

Es gibt einige große und kleinere Hersteller von elektrischen Spektrumanalysatoren, wie z.B.:

- **Advantest** <http://www.advantest.co.jp/en-index.shtml>
- **Agilent** <http://www.agilent.com>
- **Anritsu** <http://www.anritsu.com>
- **Rohde&Schwarz** <http://www.rohde-schwarz.de>
- **Willtek** <http://www.willtek.de>
- **Yokogawa** <http://www.yokogawa.com/de>

## 6.5 Optische Spektralanalyse

### 6.5.1 Elektromagnetisches Spektrum

In Abbildung 6.12 ist das elektromagnetische Spektrum skizziert. Es geht bei niedrigen Frequenzen von der Langwelle über die Mikrowelle ins Infrarot, über das sichtbare Licht (beachte Aufteilung des Spektrums in Abbildung 6.12 in diesem Bereich) bis hin zur Gamma-Strahlung.

Anhand dieses Spektrums wird die gleiche Natur hochfrequenter Schwingungen und optischer Wellen deutlich.

Aus diesem Grund kann man das optische Spektrum prinzipiell ebenfalls analysieren. Jedoch funktionieren bei diesen Frequenzen die elektronischen Bauteile nicht mehr und so werden zur Analyse andere Prinzipien angewendet, die nachfolgend dargestellt werden.

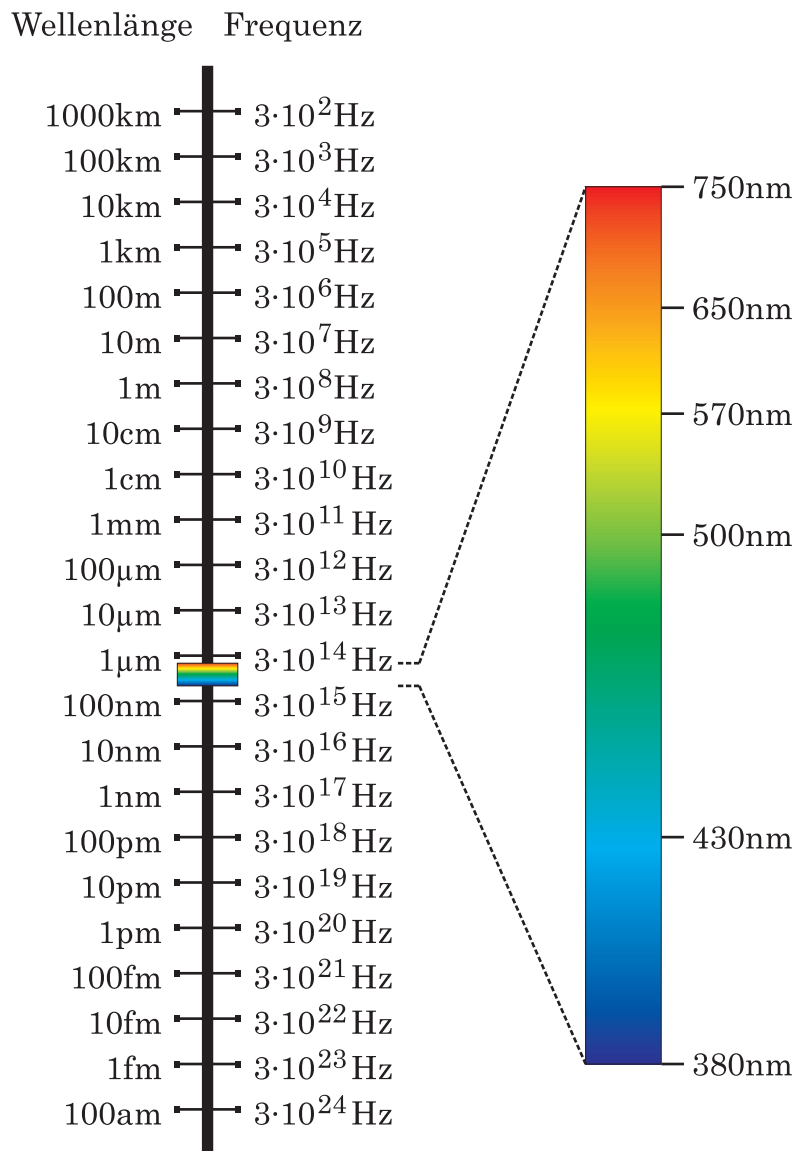


Abbildung 6.12: Elektromagnetisches Spektrum

### 6.5.2 Optischer Spektralanalysator (OSA)

In Abbildung 6.13 ist ein OSA dargestellt, der nach dem Prinzip der optischen Beugung mittels Beugungsgitter arbeitet.

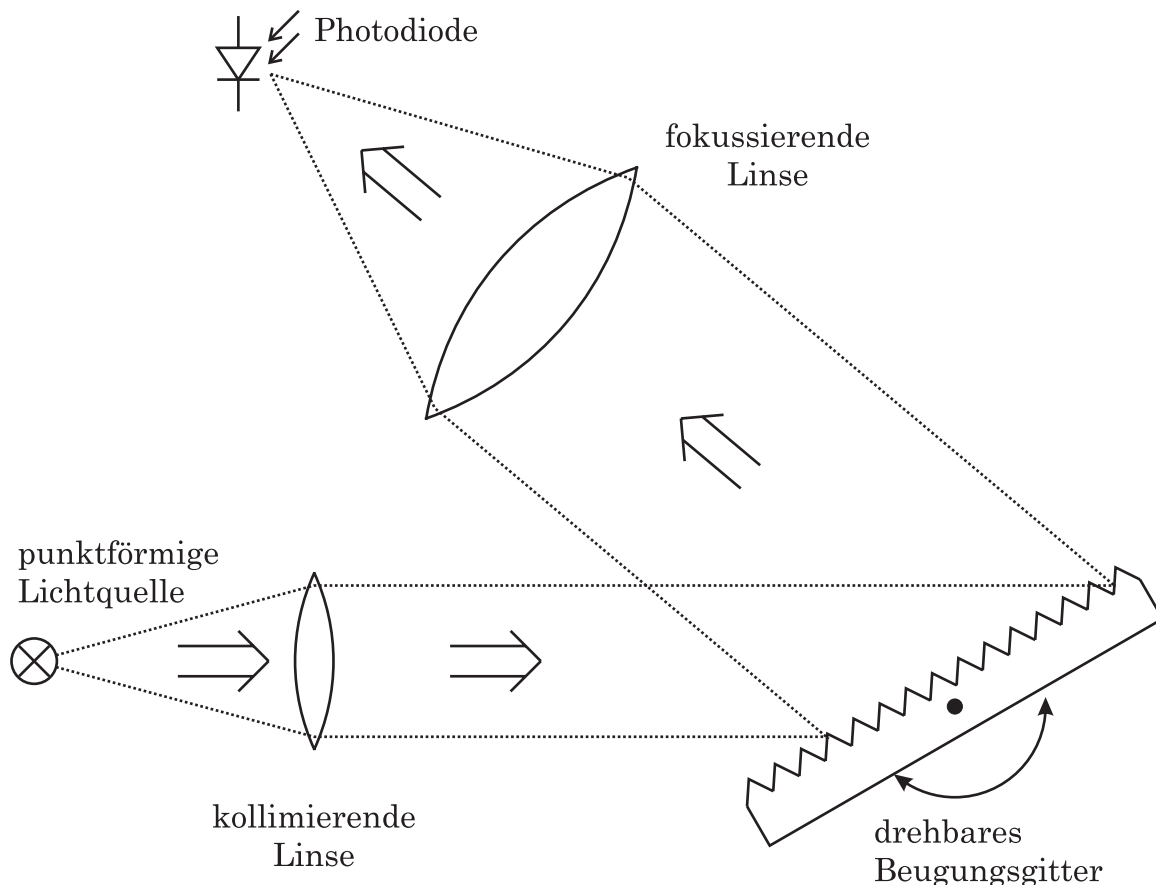


Abbildung 6.13: Prinzip eines optischen Spektralanalysators mit Beugungsgitter

Dieses Prinzip funktioniert folgendermaßen:

- Licht aus einer Punktlichtquelle wird durch eine Linse parallelisiert (kollimierende Linse – Linse, die das Licht der Punktquelle in paralleles Licht umwandelt) und auf das Gitter gerichtet
- Das Gitter besteht aus einem reflektierenden Material, das mit parallelen Linien in einem definierten Abstand versehen ist
- Das auf das Gitter auftreffende Licht wird gebeugt

- Durch die zweite Linse wird das Licht fokussiert. Der Fokuspunkt ist abhängig von der Lichtwellenlänge.
- Ein Detektor misst die Leistung an einem Punkt und damit auch bei einer Lichtwellenlänge
- Durch Drehung des Gitters wird der Fokuspunkt verschoben und damit die Leistung bei unterschiedlichen Wellenlängen gemessen

Für die Gittergleichung gilt:

$$m \cdot \lambda = d \cdot (\sin(\alpha) + \sin(\beta)) \quad (6.10)$$

Hierbei sind:

$m$ ... Beugungsordnung

$\lambda$ ... Wellenlänge (im Medium vor dem Gitter)

$d$ ... Abstand der Gitterlinien

$\alpha$ ... Einfallswinkel auf das Gitter von der Gittersenkrechten aus betrachtet

$\beta$ ... Ausfallswinkel vom Gitter von der Gittersenkrechten aus betrachtet

Formt man (6.10) um, so erhält man den Ausfallswinkel

$$\sin(\beta) = \frac{m \cdot \lambda}{d} - \sin(\alpha) \quad (6.11)$$

Es gibt noch andere Prinzipien, wie z.B. die Benutzung eines Fabry-Perot Interferometers. Diese haben im Vergleich zu Gitter-OSAs jedoch untergeordnete praktische Bedeutung.

### 6.5.3 Hersteller

Es gibt einige große und kleinere Hersteller von optischen Spektrumanalysatoren, wie z.B.:

- **Advantest** <http://www.advantest.co.jp/en-index.shtml>
- **Agilent** <http://www.agilent.com>
- **Anritsu** <http://www.anritsu.de>
- **EXFO** <http://www.exfo.com>
- **JDSU** <http://www.jdsu.com>

# 7 Messverstärker

## 7.1 Einleitung

Signale am Ausgang von Sensoren besitzen oft nur eine sehr geringe Spannung oder einen geringen Strom und sind so für die direkte Weiterverarbeitung nicht geeignet. Aus diesem Grund müssen die Sensorsignale zuerst verstärkt und eventuell vorverarbeitet werden.

Dies geschieht im analogen Signalbereich und man verwendet dazu spezielle Verstärker. Von diesen Messverstärkern werden die folgenden Eigenschaften gefordert.

- Gute Signaltreue – das Ausgangssignal soll sehr genau dem Eingangssignal folgen. Dies bedeutet für den Verstärker hohe Linearität, geringer Offset und möglichst keine Hysterese.
- Geringes Rauschen des Verstärkers – das Ausgangssignal soll durch das Verstärkerrauschen möglichst wenig verändert werden.
- Gutes dynamisches Verhalten des Verstärkers – das Ausgangssignal soll im Zeitverlauf möglichst genau dem Eingangssignal folgen.
- Geringe Rückwirkung des Verstärkers auf das Eingangssignal – der Verstärker soll die Signalquelle möglichst wenig belasten. Dies geschieht durch einen hohen Eingangswiderstand bei einer Spannungsmessung bzw. einen niedrigen Eingangswiderstand bei einer Strommessung.
- Das Ausgangssignal des Verstärkers muss unabhängig von der äußeren Belastung sein.

Abbildung 7.1 zeigt allgemeine Verstärkersymbole, wie sie oft in Blockschaltbildern vorkommen.

In Abbildung 7.1 wird der Verstärker als sogenanntes Zweitor aufgefasst – zwei stromführende Anschlüsse.

Man kann einen Verstärker auch als ein Gebilde mit vier Anschlüssen auffassen, von denen jeweils zwei mit einem Zweipol verbunden sind, so daß die Ströme paarweise gleich sind. Man spricht dann von einem Vierpol oder Zweitor (vergleiche Abb. 7.2). Wesentlich ist insbesondere die Definition des Eingangswiderstandes

$$R_E = \frac{u_E}{i_E} \quad (7.1)$$

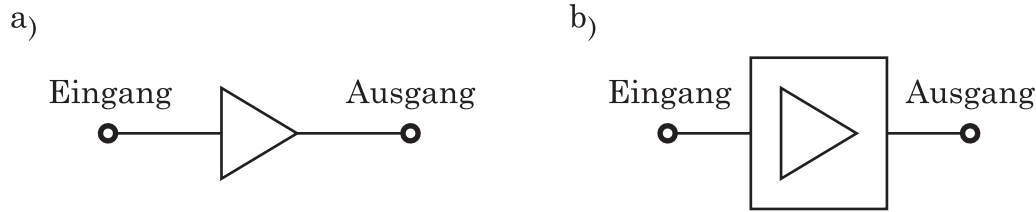


Abbildung 7.1: Symbole für Verstärker

mit  $u_E$  als der Eingangsspannung und  $i_E$  als dem Eingangsstrom sowie des Ausgangswiderstandes  $R_A$ .

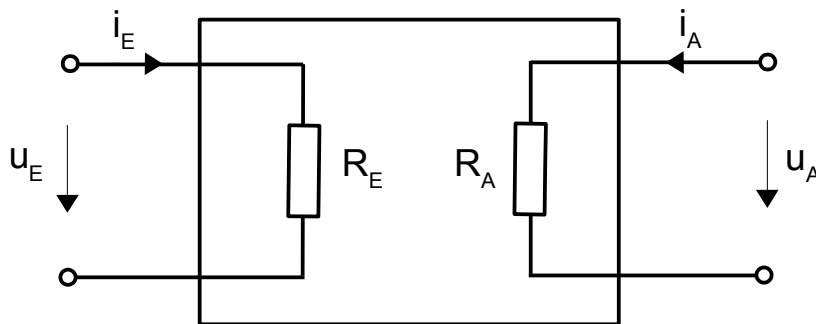


Abbildung 7.2: Verstärker als Vierpol

Für einen Spannungsverstärker soll der Eingangswiderstand  $R_E$  groß gegenüber dem Innenwiderstand  $R_I$  der Signalquelle sein, da sonst ein großer Spannungsabfall über  $R_E$  zu einer Verfälschung des Eingangssignals führt. Der Ausgangswiderstand  $R_A$  soll in diesem Fall klein gegenüber der Last  $R_L$  sein, damit ein möglichst geringer Spannungsabfall innerhalb des Verstärkers entsteht.

## 7.2 Operationsverstärker

In diesem Kapitel werden Operationsverstärker betrachtet, da sie die Anforderungen an Messverstärker aus Kapitel 7.1 sehr gut erfüllen. Zur Vereinfachung der Darstellung werden die Operationsverstärker im Folgenden als ideale Bauteile angesehen. Weiterführende Betrachtungen, wie z.B. zu Offsets, Eingangsströmen, Ausgangswiderständen und endliche Verstärkung werden hier nicht angestellt.

Abbildung 7.3 a zeigt das vereinfachte Schaltsymbol eines Operationsverstärkers.

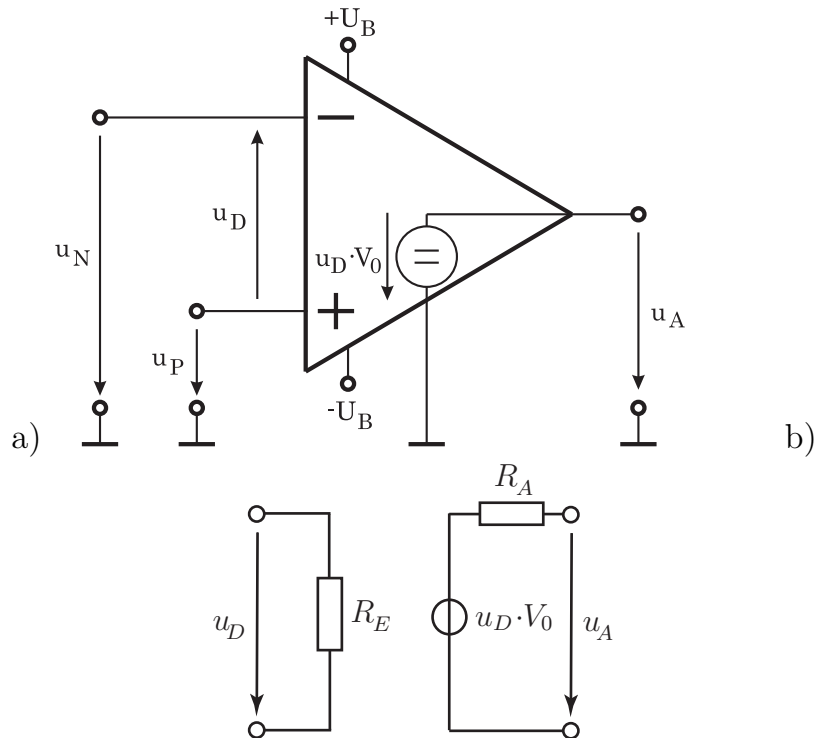


Abbildung 7.3: Schaltsymbol und Ersatzschaltbild eines idealen Operationsverstärkers

Der Verstärker besitzt zwei Spannungseingänge. Der positive Eingang (auch nichtinvertierender Eingang) wird mit  $u_P$  oder  $u_+$  bezeichnet, der negative Eingang (auch invertierender Eingang) mit  $u_N$  oder  $u_-$ . Die Anschlüsse für die Betriebsspannungen  $U_B$  (oft  $+15\text{V}$  und  $-15\text{V}$ ) werden im vereinfachten Schaltsymbol nicht angegeben.

Für einen idealen Verstärker kann die Spannungsdifferenz

$$u_D = u_P - u_N \quad (7.2)$$

zwischen den beiden Eingängen zur Berechnung des Ausgangssignals  $u_A$  verwendet werden. Es gilt

$$u_A = V_0 \cdot u_D \quad (7.3)$$

mit  $V_0$  als Leerlaufverstärkung.

Der Ausgang verhält sich wie eine ideale Spannungsquelle, solange  $-U_B < u_A < U_B$ .

Verbindet man den positiven Eingang mit Masse ( $u_P = 0$ ), so gilt  $u_A = -V_0 \cdot u_N$ . Die Spannung, die zwischen dem negativen Eingang und Masse anliegt wird also verstärkt und invertiert. Daher kommt die Bezeichnung als invertierender Eingang. Schließt man den negativen Eingang an Masse an, so folgt analog  $u_A = V_0 \cdot u_P$ .

### Grundlegende Eigenschaften des idealen Operationsverstärkers

1. Sehr hohe (unendliche) Verstärkung der Spannungsdifferenz beider Eingänge  $u_D$ :

$$V_0 \rightarrow \infty \quad (7.4)$$

Daraus folgt im Linearitätsbereich  $u_P = u_N$ . Im Linearitätsbereich gilt  $|u_A| < |U_B|$ , also keine Übersteuerung.

2. Keine Gleichtaktverstärkung der Eingangsspannungen, d.h. für die Ausgangsspannung  $u_A$  ist nur die Spannungsdifferenz zwischen den beiden Eingängen relevant.
3. Sehr hoher (unendlicher) Eingangswiderstand  $R_E$ , d.h. es fließt kein Strom in die beiden Eingänge.
4. Sehr geringer Ausgangswiderstand, d.h. am Ausgang ist eine ideale Spannungsquelle vorhanden.
5. Alle Eigenschaften sind unabhängig von der Frequenz und Temperatur.

### Kenngößen realer Operationsverstärker

Sollen Operationsverstärker in der Praxis eingesetzt werden, können die eben dargelegten Eigenschaften eines idealen Operationsverstärkers nicht mehr vorausgesetzt werden. Nachfolgende noch einmal dieselbe Aufzählung, jetzt aber mit Anmerkungen hinsichtlich realer Bauelemente.

1. Die Leerlaufverstärkung ist nicht mehr unendlich, erfüllt aber die Bedingung  $V_0 \gg 1$  (üblicherweise  $> 10^5$ ). Bei hohen Spannungen am Ausgang  $|u_A| < |U_B|$  verlässt die Transferkennlinie den Linearitätsbereich und knickt ab. Das ist der sogenannte Sättigungsbereich. Der Operationsverstärker ist dann übersteuert.
2. Die Ausgangsspannung  $u_A$  ist nicht nur von der Spannungsdifferenz zwischen den beiden Eingängen abhängig, sondern auch vom sogenannten Gleichtaktsignal  $u_{GL} = (u_P + u_N)/2$ . Das bedeutet, daß bei kurzgeschlossenen Eingängen ( $u_D = 0$ ), am Ausgang trotzdem eine Spannung  $u_A$  gemessen werden kann. Dementsprechend kann man eine Gleichtaktverstärkung  $V_{GL}$  definieren. In Datenblättern wird oft das Verhältnis aus der Gleichtaktverstärkung und Leerlaufverstärkung angegeben. Es wird auch als Gleichtaktunterdrückung oder CMRR (common mode rejection ratio) bezeichnet und soll möglichst hoch sein (ideal:  $\infty$ , real:  $> 65dB$ ).
3. Der Eingangswiderstand  $R_E$  ist nicht unendlich, d.h. es gibt einen (sehr kleinen) Strom in die beiden Eingänge.



4. Der Ausgangswiderstand  $R_A$  ist nicht Null, sondern beträgt üblicherweise durchaus einige zig  $\Omega$ .
5. Das Verhalten des Operationsverstärkers ist temperaturabhängig, einige Größen sollten daher temperaturkompensiert werden. Es gibt eine obere Grenzfrequenz, oberhalb dieser die Verstärkung stark absinkt.

Durch unterschiedliche äußere Beschaltung des Operationsverstärkers lassen sich sehr unterschiedliche Anwendungen erreichen. Die Eigenschaften der entstehenden Schaltungen hängen zumindest in erster Näherung nur von den äußeren Schaltelementen ab. Daraus folgt, dass die konkreten Eigenschaften des verwendeten Operationsverstärkers kaum relevant sind.

Im Internet sind zahlreiche Kurse und Applets von Verstärkerschaltungen vorhanden. Nachfolgend zwei Adressen, die von Studierenden empfohlen wurden:

<http://www.projektlabor.tu-berlin.de/menue/onlinekurs/schaltungsentwurf>

– *OPV-Quiz* wählen, dann *Schaltungshilfe*

<http://falstad.com/circuit>

– Simulator für diverse Standardbeschaltungen, Auswahl über *Circuits*

## 7.3 Verstärkerschaltungen

Nachfolgend werden die wichtigen Verstärkergrundsaltungen betrachtet und berechnet.

Alle Verstärkerschaltungen haben die Rückkopplung des Ausgangs auf den negativen Eingang gemeinsam. !

### 7.3.1 Invertierender Verstärker

Eine der einfachsten Verstärkerschaltungen ist der invertierende Verstärker gemäß Abbildung 7.4.

Der positive Eingang hat Masse-Potential. Wenn der Ausgang nicht übersteuert ist und unter der Annahme eines idealen Verstärkers, kann vorausgesetzt werden, daß:

1. die Spannungsdifferenz  $u_D$  gegen Null geht. Damit kann also auch  $u_N \rightarrow 0$  angenommen werden. Man spricht dann von “virtueller Masse”.
2. in beide Eingangsklemmen kein Strom fließt.

In den negativen Eingang des Operationsverstärkers fließt also kein Strom, woraus folgt, dass

$$i_1 = -i_2 \quad (7.5)$$

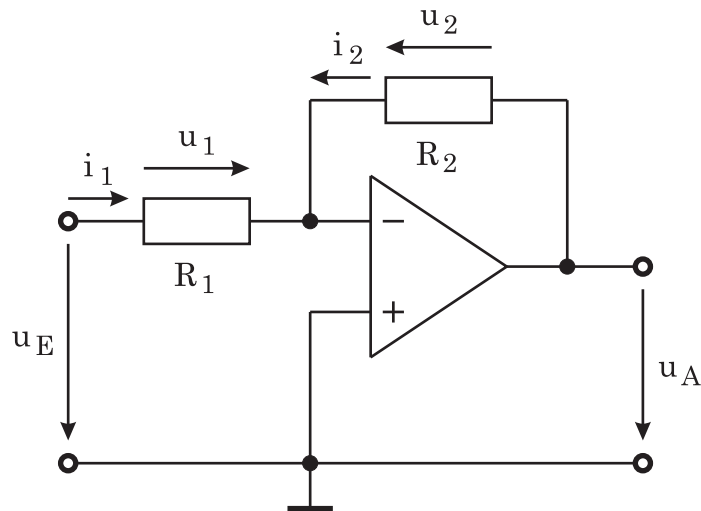


Abbildung 7.4: Invertierender Verstärker

ist.

Für die Ströme durch die Widerstände gilt gemäß dem Ohmschen Gesetz

$$\frac{u_1}{R_1} = -\frac{u_2}{R_2} . \quad (7.6)$$

Unter Annahme eines idealen Verstärkers gilt weiterhin  $u_1 = u_E$  und  $u_2 = u_A$ .  
Damit folgt aus (7.6)

$$\frac{u_E}{R_1} = -\frac{u_A}{R_2} \quad (7.7)$$

$$u_A = -u_E \cdot \frac{R_2}{R_1} . \quad (7.8)$$

Aus (7.8) ist abzuleiten:

- Die Ausgangsspannung ist zur Eingangsspannung invertiert.
- Die Verstärkung wird durch das Widerstandsverhältnis bestimmt

$$V = \frac{u_A}{u_E} = -\frac{R_2}{R_1} . \quad (7.9)$$

Betrachtet man die allgemeine Definition des Eingangswiderstandes  $R_E$  gemäß (7.1),  
so folgt für den invertierenden Verstärker

$$i_E = i_1 = \frac{u_E}{R_1} . \quad (7.10)$$

Aus (7.1) folgt durch Einsetzen von (7.10) für den Eingangswiderstand:

$$R_E = \frac{u_E \cdot R_1}{u_E} = R_1 . \quad (7.11)$$

Zur Erreichung großer Verstärkungen sollte gemäß (7.9) der Widerstand  $R_1$  nicht zu groß gewählt werden. Damit ist aber gemäß (7.11) der Eingangswiderstand  $R_E$  der Schaltung klein und damit die Quelle belastet.

Mit einem invertierenden Verstärker sind auch Verstärkungen von  $V < 1$  realisierbar. Diese Funktion kann für Pegelanpassungen verwendet werden.

### 7.3.2 Nichtinvertierender Verstärker

Abbildung 7.5 zeigt den nichtinvertierenden Verstärker.

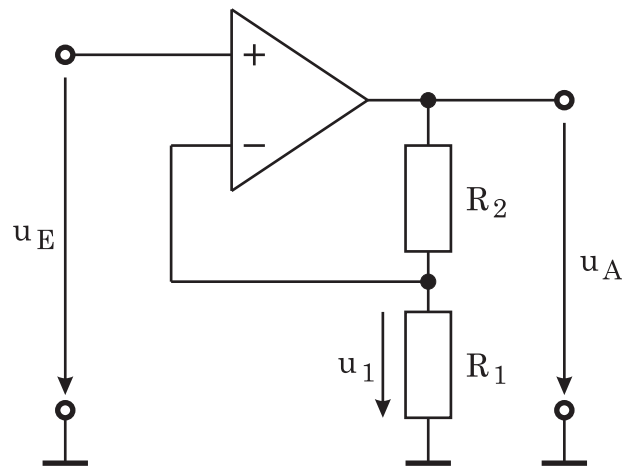


Abbildung 7.5: Nichtinvertierender Verstärker

Die Eingangsspannung  $u_E$  liegt am positiven Eingang an, die Spannung  $u_1$  liegt am negativen Eingang an. Die Differenz beider Spannungen  $u_D$  ist bei nicht übersteuertem Ausgang wieder gleich Null, folglich gilt:

$$u_E = u_1 . \quad (7.12)$$

Für die Spannung  $u_1$  folgt nach der Spannungsteilerregel:

$$u_1 = u_A \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} . \quad (7.13)$$

Für die Verstärkung folgt damit aus (7.12) und (7.13):

$$V = \frac{u_A}{u_E} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} . \quad (7.14)$$

Für den allgemeinen Eingangswiderstand  $R_E$  muss wieder das Verhältnis aus Eingangsspannung  $u_E$  und Eingangsstrom  $i_E$  betrachtet werden. Bei einem idealen Operationsverstärker ist  $i_E = 0$  und es folgt für den Eingangswiderstand:

$$R_E = \frac{u_E}{i_E} \Rightarrow R_E \rightarrow \infty \quad \text{für } i_E = 0 . \quad (7.15)$$

Daraus folgt, dass die Signalquelle durch den sehr hohen Eingangswiderstand des Verstärkers kaum belastet wird. Die Wahl der Verstärkung  $V$  verändert also bei einem nichtinvertierenden Verstärker nicht die Belastung der Quelle. Es kann nur eine Verstärkung größer als 1 gewählt werden.

### 7.3.3 Instrumentenverstärker

Der Instrumentenverstärker in Abbildung 7.6 ist ein Präzisionsverstärker, der die Differenz zweier Eingangsspannungen  $u_{E1}$  und  $u_{E2}$  möglichst genau verstärkt. Er ermöglicht eine potentialunabhängige Messung der beiden Spannungen.

Die Gleichtaktspannung der beiden Eingänge soll möglichst stark unterdrückt werden. Aus diesem Grund liegt keiner der Eingänge der beiden linken Operationsverstärker auf einem festen Bezugspotential.

Für beide Eingangsspannungen gilt ein sehr hoher Eingangswiderstand, da diese nur in den positiven Eingang der Operationsverstärker führen und so praktisch kein Strom fließt. Aufgrund des daraus folgenden hohen Eingangswiderstandes wird die Signalquelle kaum beeinflusst.

Für die Verstärkung folgt:

$$V = \frac{u_A}{u_{E2} - u_{E1}} = \frac{R_4}{R_3} \cdot \left( 1 + \frac{R_1 + R_2}{R} \right) \quad (7.16)$$

Hierbei sind die Widerstände  $R_6 = R_4$  und  $R_5 = R_3$ .

## 7.4 Rechenschaltungen

Sollen analoge Größen rechnerisch umgeformt werden, so sind analoge Rechenschaltungen nötig.

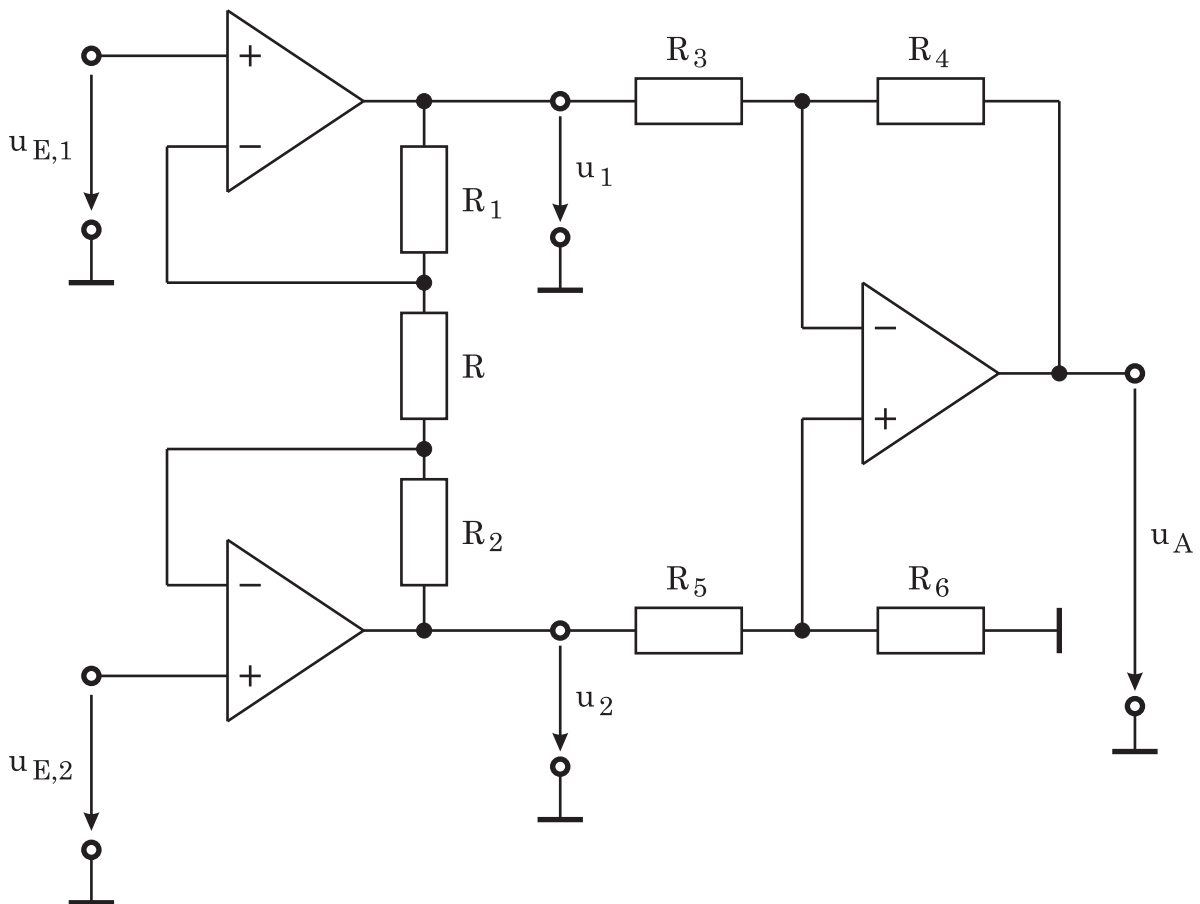


Abbildung 7.6: Instrumentenverstärker

### 7.4.1 Addierer

Der Addierer ist in Abbildung 7.7 dargestellt.

Beide Eingänge des Operationsverstärkers liegen auf Massepotential. Daraus folgt

$$u_A = i_3 \cdot R_3 . \quad (7.17)$$

Wenn man den Knoten vor dem negativen Eingang betrachtet, dann folgt für die Ströme gemäß Knotengleichung:

$$i_3 = -(i_1 + i_2) . \quad (7.18)$$

Wegen (7.17) kann man mit (7.18) auch

$$u_A = -(i_1 + i_2) \cdot R_3 \quad (7.19)$$

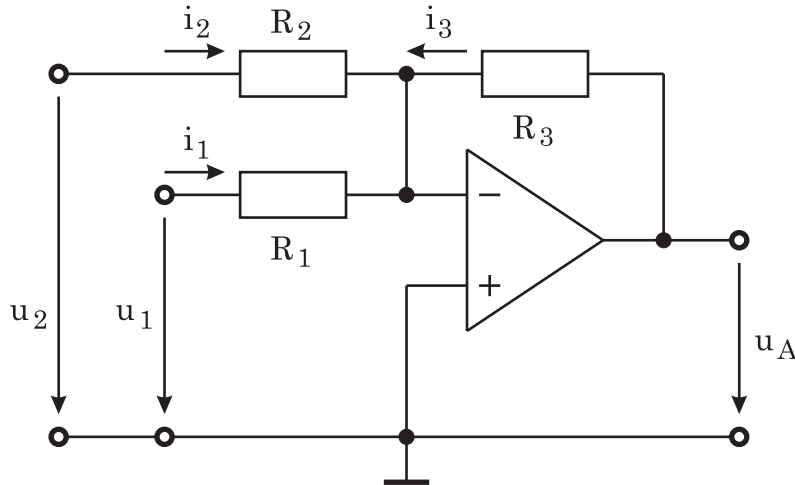


Abbildung 7.7: Addierer

schreiben. Mit  $i_1 = \frac{u_1}{R_1}$  und  $i_2 = \frac{u_2}{R_2}$  folgt

$$u_A = - \left( \frac{u_1}{R_1} \cdot R_3 + \frac{u_2}{R_2} \cdot R_3 \right) \quad (7.20)$$

$$u_A = - \left( u_1 \cdot \frac{R_3}{R_1} + u_2 \cdot \frac{R_3}{R_2} \right) \quad (7.21)$$

Aus (7.21) wird deutlich, dass die beiden Eingangsspannungen  $u_1$  und  $u_2$  gewichtet addiert werden. Die Gewichtungsfaktoren werden dabei durch die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  eingestellt. Die Polarität des Ausgangssignals ist gegenüber der Polarität der Eingangssignale invertiert.

Der Eingangswiderstand des Eingangs 1 ist  $R_1$  und der Eingangswiderstand des Eingangs 2 ist  $R_2$ .

### 7.4.2 Subtrahierer

In Abbildung 7.8 ist der subtrahierende Verstärker abgebildet.

Zur Berechnung der Ausgangsspannung wird zuerst die Spannung am nichtinvertierenden Eingang des Operationsverstärkers berechnet:

$$u_P = u_2 \cdot \frac{R_4}{R_2 + R_4} \quad (7.22)$$

Da kein Strom in den invertierenden Eingang fließt, gilt gemäß Knotengleichung

$$i_3 = - i_1 \quad (7.23)$$

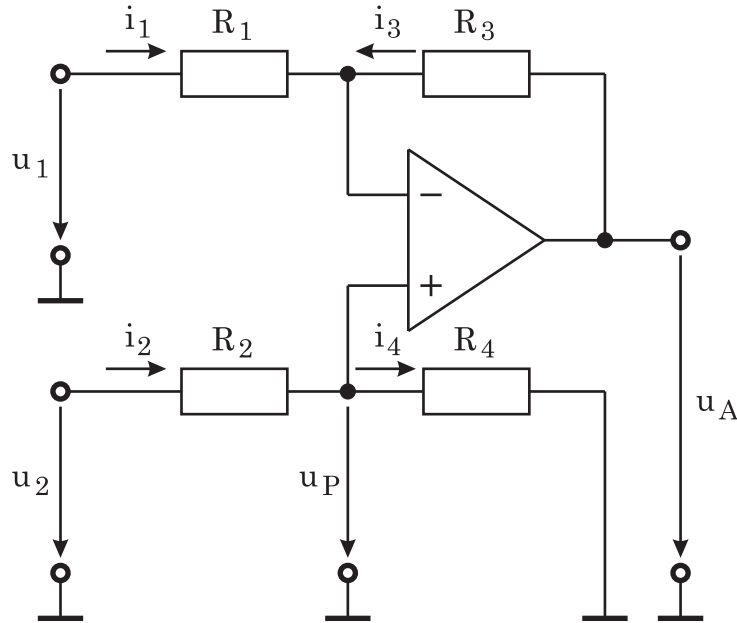


Abbildung 7.8: Subtrahierer

und für die Maschen  $u_A - R_3 - u_N$  bzw.  $u_1 - R_1 - u_N$

$$u_A = i_3 \cdot R_3 + u_N \quad (7.24)$$

$$u_1 = i_1 \cdot R_1 + u_N \quad (7.25)$$

Damit folgt wegen (7.23)

$$\frac{u_A - u_N}{R_3} = -\frac{u_1 - u_N}{R_1} . \quad (7.26)$$

Durch weitere Umformungen folgt für die Ausgangsspannung  $u_A$ :

$$\frac{u_A}{R_3} = \frac{u_N}{R_1} + \frac{u_N}{R_3} - \frac{u_1}{R_1} \quad (7.27)$$

$$u_A = u_N \cdot \frac{R_1 + R_3}{R_1} - u_1 \cdot \frac{R_3}{R_1} \quad (7.28)$$

Mit der Nebenbedingung  $u_P = u_N$  folgt aus (7.22) und (7.28):

$$u_A = u_2 \cdot \frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_4} - u_1 \cdot \frac{R_3}{R_1} . \quad (7.29)$$

(7.29) beschreibt folglich einen Subtrahierer mit unterschiedlich gewichteten Eingangsspannungen.

Wählt man gleiche Widerstandsverhältnisse für beide Eingänge  $\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$ , so werden die Eingangsspannungen gleich gewichtet:

$$u_A = \frac{R_3}{R_1} \cdot (u_2 - u_1) . \quad (7.30)$$

### 7.4.3 Differenzierer

Beim Differenzierer gemäß Abbildung 7.9 ist die Ausgangsspannung  $u_A$  proportional zur Ableitung der Eingangsspannung  $u_E$ .

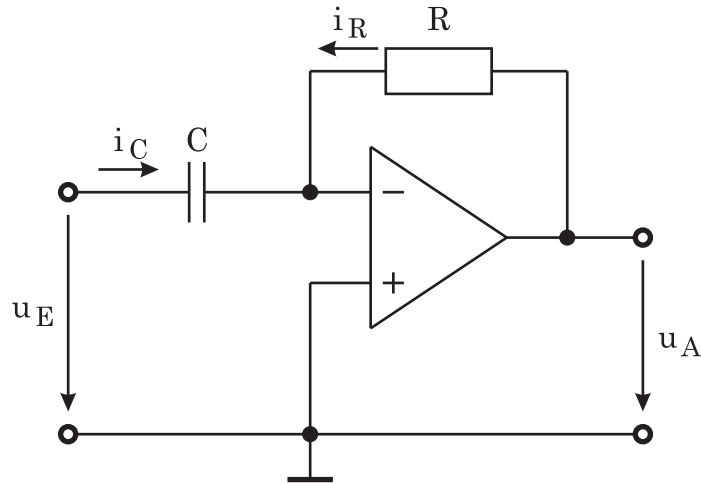


Abbildung 7.9: Differenzierer

Man betrachtet wieder den Knoten vor dem invertierenden Eingang:

$$i_R = -i_C \quad (7.31)$$

und die Maschengleichung

$$u_A = i_R \cdot R \quad (7.32)$$

Für den Strom durch den Kondensator gilt

$$i_C = C \cdot \frac{du_E}{dt} \quad (7.33)$$

Mit (7.31) folgt aus (7.32):

$$u_A = -i_C \cdot R = -R \cdot C \cdot \frac{du_E}{dt} \quad (7.34)$$

Der Proportionalitätsfaktor zwischen der Ausgangsspannung und der Ableitung der Eingangsspannung in (7.34) wird durch  $R$  und  $C$  gebildet. Die Beziehung (7.34) beschreibt das Verhalten von  $u_A$  im Zeitbereich für beliebig zeitabhängige Spannungen  $u_E$ .



Berechnet man die Schaltung im Frequenzbereich, so ergibt sich:

$$\underline{V} = -\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C} = -\frac{R}{\frac{1}{j\omega C}} = -j\omega RC \quad (7.35)$$

Bei Gleichspannung ( $\omega = 0$ ) ist die Verstärkung gleich 0 und steigt proportional zur Frequenz an.

#### 7.4.4 Integrator

Integrierendes Verhalten läßt sich durch Beschaltung des Operationsverstärkers gemäß Abbildung 7.10 erreichen.

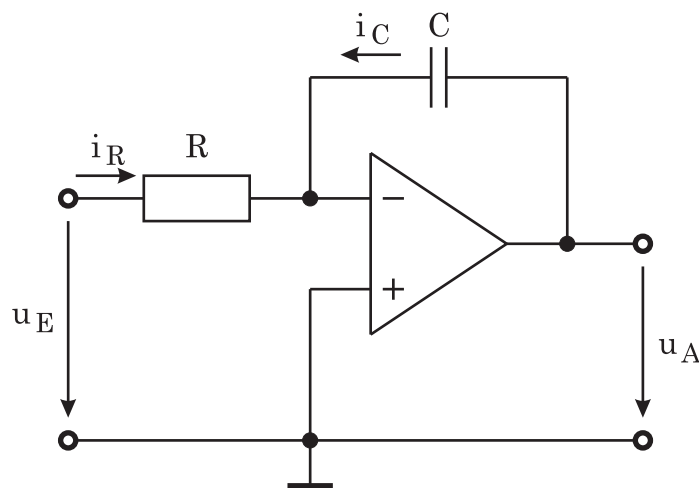


Abbildung 7.10: Integrator

Der Integrator gibt die integrierte und mit einem Faktor gewichtete Eingangsspannung  $u_E$  am Ausgang  $u_A$  aus. Die Berechnung erfolgt analog zu den bisher betrachteten Schaltungen.

$$u_A = \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt = -\frac{1}{C} \int_0^t i_R dt = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_E dt \quad (7.36)$$

Der Gewichtungsfaktor für das Integral ist  $-\frac{1}{RC}$ .

(7.36) gilt, sofern vor Beginn der Integration  $u_A = 0$  ist, ansonsten wird eine Konstante addiert.

### 7.4.5 Logarithmierer

Der Logarithmierer gemäß Abbildung 7.11 gibt die Ausgangsspannung  $u_A$  proportional zum Logarithmus der Eingangsspannung  $u_E$  aus.

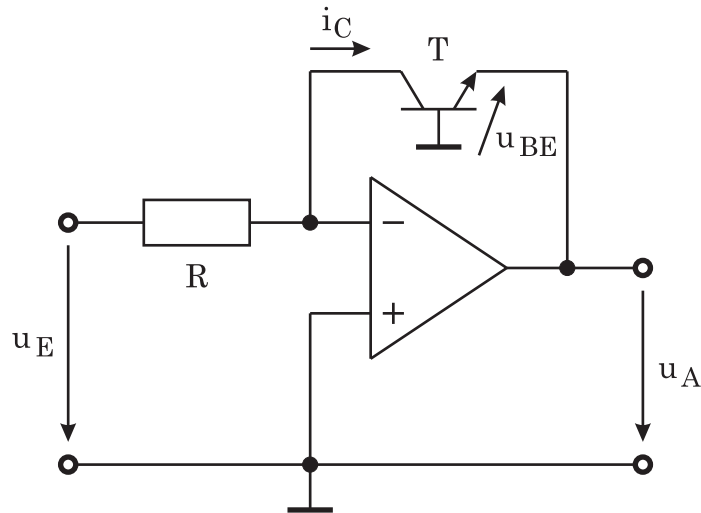


Abbildung 7.11: Logarithmierer

Diese Schaltung wird manchmal benutzt, wenn sich die Eingangsgröße über einen Bereich vieler Größenordnungen ändert und am Ausgang der logarithmische Wert (Stichwort: dB) interessant ist.

Der Logarithmierer besteht im Prinzip aus einem invertierenden Verstärker, in dessen Rückkopplungszweig ein nichtlineares Bauteil eingebaut ist, das für die Logarithmierung sorgt. Dieses kann z.B. eine Diode oder ein Transistor sein.

Für den Kollektorstrom des Transistors gilt näherungsweise:

$$i_C = I_{CS} \cdot e^{\frac{u_{BE}}{U_T}} \quad . \quad (7.37)$$

Hierbei sind  $I_{CS}$  der Kollektorsperrstrom und  $U_T$  die Temperaturspannung des Transistors.

Mit den Zusammenhängen  $u_{BE} = -u_A$  und  $i_C = \frac{u_E}{R}$  folgt aus (7.37) :

$$\frac{u_E}{R} = I_{CS} \cdot e^{-\frac{u_A}{U_T}} \quad (7.38)$$

und damit gilt für die Ausgangsspannung

$$u_A = -U_T \cdot \ln \left( \frac{u_E}{R \cdot I_{CS}} \right) \quad . \quad (7.39)$$

Diese Gleichung gilt für  $u_E > 0$ .

## 7.5 Filterschaltungen

In diesem Abschnitt werden nur einfache Filter 1. Ordnung betrachtet. Für Filter höherer Ordnung wird auf die entsprechende Literatur z.B. Tietze/Schenk: Halbleiter-Schaltungstechnik verwiesen.

### 7.5.1 Tiefpass

Ein Tiefpass gemäß Abbildung 7.12 wird ähnlich zu einem invertierenden Verstärker berechnet.

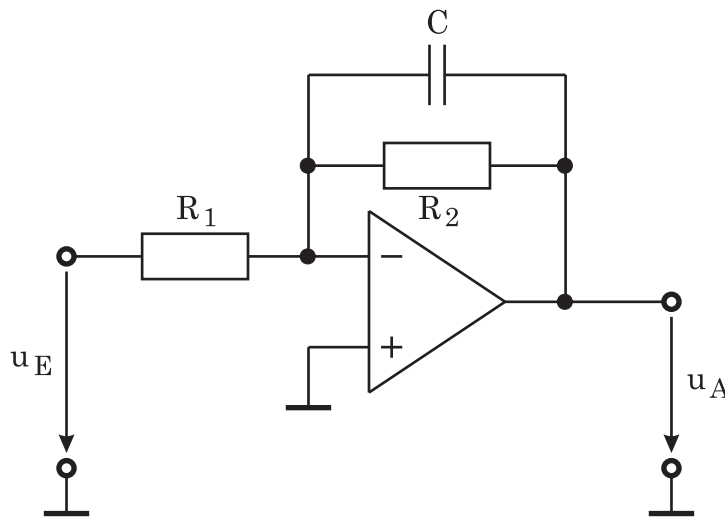


Abbildung 7.12: Tiefpass 1. Ordnung

Im Rückkopplungszweig befindet sich nun anstatt des Widerstandes bei einem invertierenden Verstärker die Parallelschaltung eines Widerstandes und eines Kondensators. Die Berechnung erfolgt deshalb zweckmäßigerweise im Frequenzbereich bzw. in der komplexen Ebene. Die Verstärkung kann dann durch:

$$\underline{V} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = -\frac{1}{R_1 \cdot \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right)} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega C \cdot R_2} \quad (7.40)$$

ausgedrückt werden. Im Gleichspannungsfall besitzt der Tiefpass die gleiche Verstärkung wie ein invertierender Verstärker ohne Kondensator:

$$V(\omega = 0) = -\frac{R_2}{R_1} \quad (7.41)$$

Mit steigender Frequenz sinkt der Wechselstromwiderstand des Kondensators, für sehr hohe Frequenzen kann der Kondensator durch einen Kurzschluß ersetzt werden. Eine Kenngröße zur Charakterisierung des Frequenzverhaltens ist die Grenzfrequenz  $\omega_G$ , für die

$$V(\omega = \omega_G) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (7.42)$$

gilt.

Bei der Grenzfrequenz des Tiefpasses ist die Verstärkung um den Faktor  $\sqrt{2}$  gegenüber dem Gleichspannungsfall geringer (beachte Betragsbildung, (7.40) ist eine komplexe Größe!!). Daraus folgt für die Frequenz:

$$\omega_G \cdot C \cdot R_2 = 1 \quad \rightarrow \quad \omega_G = \frac{1}{CR_2} . \quad (7.43)$$

Die in dB ausgedrückte Spannungsverstärkung ist bei der Grenzfrequenz um -3 dB kleiner als die maximale Verstärkung.

## 7.5.2 Hochpass

Abbildung 7.13 zeigt einen Hochpass 1. Ordnung.

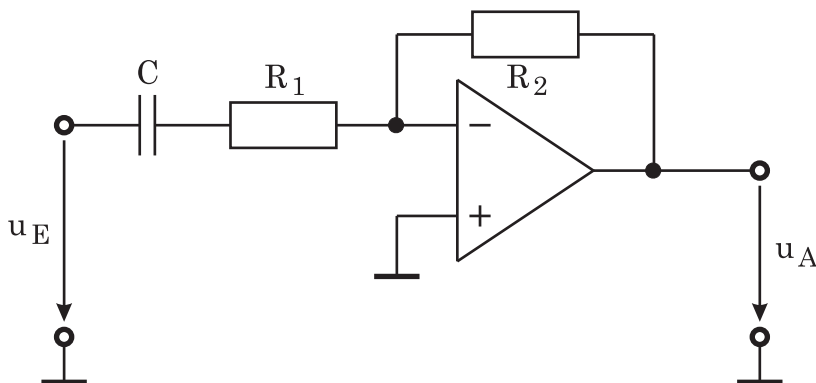


Abbildung 7.13: Hochpass 1. Ordnung

Für die Übertragungsfunktion gilt:

$$\underline{V} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega C \cdot R_1}} . \quad (7.44)$$

Bei Gleichspannung  $\omega = 0$  besitzt der Hochpass eine Verstärkung von  $V = 0$ . Diese steigt mit steigender Frequenz an und beträgt für sehr hohe Frequenzen :

$$V(\omega \gg \omega_G) = -\frac{R_2}{R_1} . \quad (7.45)$$

Für die Grenzfrequenz folgt gemäß (7.42):

$$\frac{1}{\omega_G C \cdot R_1} = 1 \quad \rightarrow \quad \omega_G = \frac{1}{CR_1} . \quad (7.46)$$

### 7.5.3 Bandpass

Ein Bandpass gemäß Abbildung 7.14 besteht aus einem Tiefpass am Eingang und einem Hochpass am Ausgang eines nichtinvertierenden Verstärkers, der als Spannungsfolger geschaltet ist.

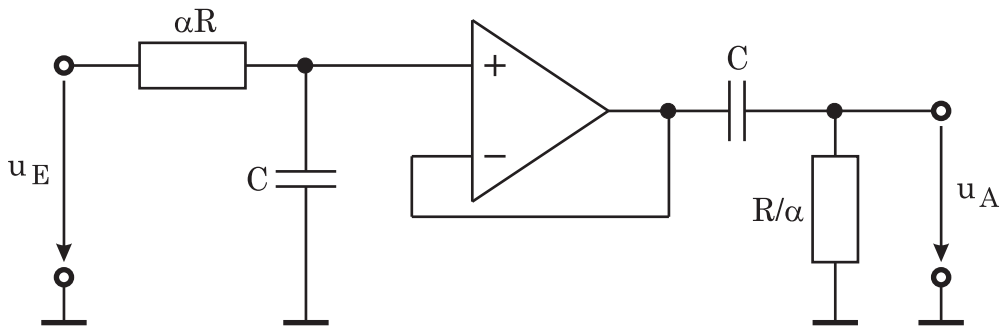


Abbildung 7.14: Bandpass

Für die Übertragungsfunktion ergibt sich als Produkt der Tiefpass- und der Hochpass-Funktion. Für den Tiefpass gilt:

$$\underline{V}_T = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\alpha R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega C \alpha R} . \quad (7.47)$$

Für den Hochpass gilt:

$$\underline{V}_H = \frac{\frac{R}{\alpha}}{\frac{R}{\alpha} + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{j\omega CR}} . \quad (7.48)$$

Die gesamte Übertragungsfunktion ergibt sich als Produkt der beiden Einzelfunktionen:

$$\underline{V} = \underline{V}_T \cdot \underline{V}_H = \frac{1}{1 + j\omega C \alpha R} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{j\omega CR}} . \quad (7.49)$$

Für die Mittenfrequenz, dem arithmetischen Mittel der Grenzfrequenzen des Hoch- und Tiefpassanteils des Bandpasses folgt:

$$\omega_R = \frac{1}{RC} . \quad (7.50)$$

Die Güte  $Q$  des Bandpasses ist ein Maß für die relative Bandbreite  $\frac{\Delta\omega}{\omega_R}$  mit  $\Delta\omega = \omega_{RT} - \omega_{RH}$  des Filters. Es gilt

$$Q = \frac{\omega_R}{\omega_{RT} - \omega_{RH}} \quad (7.51)$$

$$= \frac{\frac{1}{CR}}{\left(\frac{\alpha}{CR} - \frac{1}{\alpha \cdot CR}\right)} \quad (7.52)$$

Damit folgt für die Güte

$$Q = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} \cdot \quad (7.53)$$

Sie ist also nur abhängig vom Faktor  $\alpha$ .

## 7.6 Komparatorschaltungen

Bei allen bisher gezeigten Schaltungen arbeitet der Operationsverstärker im linearen Bereich, d.h. der Ausgang ist nicht übersteuert. Dies wird erreicht, indem der Ausgang zur Gegenkopplung auf den invertierenden Eingang rückgeführt wird. Komparatoren sind nichtlineare Schaltungen, bei denen der Operationsverstärker immer in Sättigung ist. Die Rückführung auf den negativen Eingang ist hier nicht mehr vorhanden.

### 7.6.1 Komparator

Der Komparator gemäß Abbildung 7.15 vergleicht die Eingangsspannung  $u_E$  am nichtinvertierenden Eingang mit einer Referenzspannung am invertierenden Eingang des Operationsverstärkers.

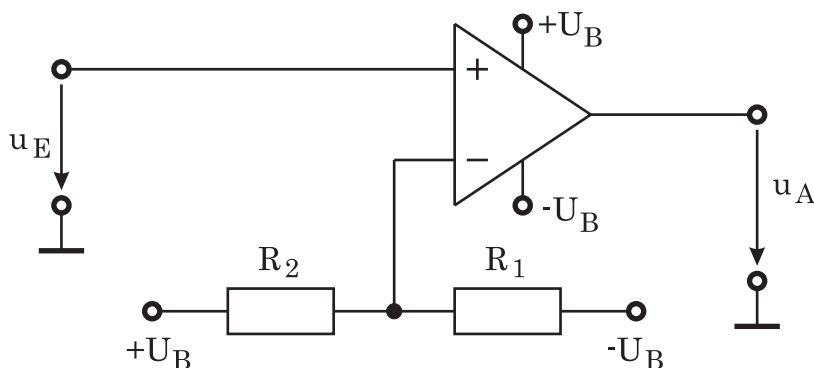


Abbildung 7.15: Komparator

Ist die Differenz positiv, so geht der Ausgang des Operationsverstärkers in die positive Sättigung, ist die Differenz negativ – in die negative Sättigung.

### 7.6.2 Schmitt-Trigger

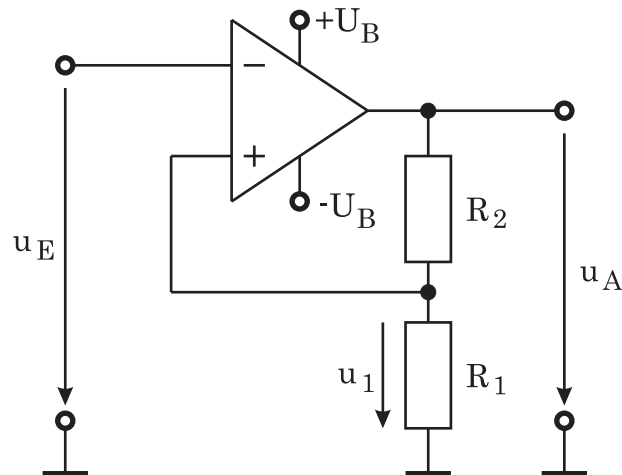


Abbildung 7.16: Schmitt-Trigger

Der Schmitt-Trigger ist eine spezielle Komparator-Schaltung (Abbildung 7.16). Durch die Mitkopplung des Ausgangs an den nichtinvertierenden Eingang wird eine Hysterese erzeugt, die beispielsweise zur Erzeugung binärer Signale verwendet werden kann.

Infolge der Mitkopplung kann die Ausgangsspannung nur die Werte  $u_{Amax}$  nahe der positiven Versorgungsspannung und  $u_{Amin}$  nahe der negativen Versorgungsspannung haben.

Für die Umschaltsschwellen gilt:

$$u_{Eauf} = u_{Amin} \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \quad (7.54)$$

Bei der Spannung  $u_{Eauf}$  am Eingang wird von  $u_{Amin}$  nach  $u_{Amax}$  am Ausgang umgeschaltet.

$$u_{Eab} = u_{Amax} \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \quad (7.55)$$

Bei der Spannung  $u_{Eab}$  am Eingang wird von  $u_{Amax}$  nach  $u_{Amin}$  am Ausgang umgeschaltet.

Ist bei einem Komparator eine rauschende Eingangsspannung in der Nähe der Schaltschwelle vorhanden, so schaltet sein Ausgang ständig um. Dies wird durch die Hysterese des Schmitt-Triggers, die durch  $R_1$  und  $R_2$  einstellbar ist, vermieden.

## 7.7 D/A-Wandler

### 7.7.1 Funktionsweise

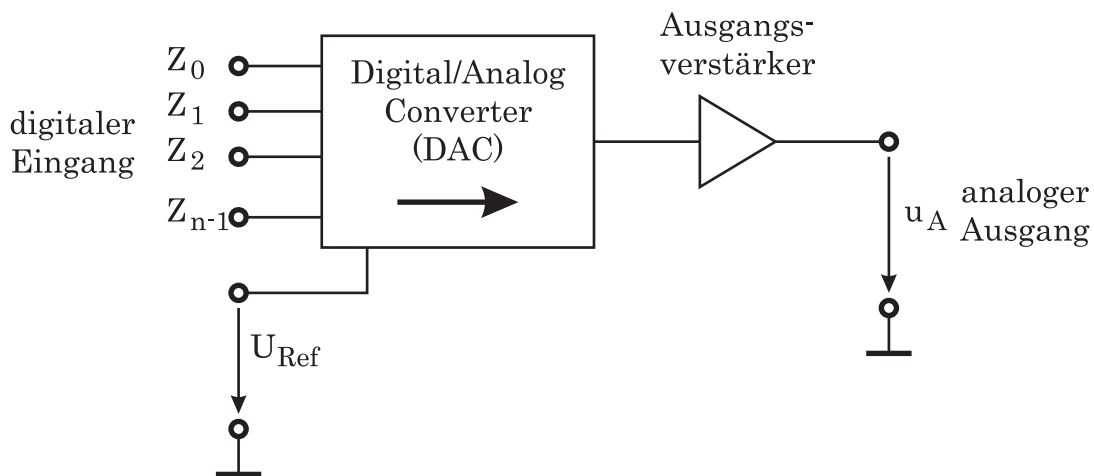


Abbildung 7.17: Schema eines D/A-Wandlers

Digital/Analog-Wandler (D/A-Wandler) erzeugen aus einem binären Datenwort an ihrem Eingang eine dazu proportionale Spannung an ihrem Ausgang (siehe Abbildung 7.17).

Mit einem solchen Wandler kann man z.B. eine Audioausgabe mit einem Computer realisieren.

Ein D/A-Wandler wird durch folgende wesentliche Kenndaten charakterisiert:

- **Ausgangsspannungsbereich** – ist durch die minimale Ausgangsspannung  $U_{Min}$  und durch die maximale Ausgangsspannung  $U_{Max}$  charakterisiert. Je nach Wandlertyp kann der Ausgangsspannungsbereich unipolar oder bipolar sein.
- **Spannungsauflösung** – ist die kleinste Spannung, die noch unterschieden werden kann

$$\Delta U_A = \frac{U_{Max} - U_{Min}}{2^n} \quad (7.56)$$



Dabei bezeichnet  $n$  die Breite des digitalen Eingangswortes.

- **Einschwingzeit** – bezeichnet die Zeit bis die Ausgangsspannung bis auf einen Restfehler von  $\pm 0,5 \cdot \Delta U_A$  eingeschungen ist.
- **Spannungsfehler** – Fehler der Ausgangsspannung des Wandlers bezogen auf die ideale Ausgangsspannung bei dem entsprechenden Digitalwert:

$$F_{U(n)} = U(n)_{real} - U(n)_{ideal} \quad (7.57)$$

- **Störungen, Rauschen** – Bei Anwendungen mit hoher Genauigkeit ist die Rauschcharakteristik der analogen Ausgangsspannung interessant. Hier interessiert meist, wie groß der Effektivwert der Rauschspannung ist und wie die Verteilung der Rauschspannung über die Frequenz ist.

## 7.7.2 Parallelwandler

Bei den parallelen D/A-Wandlern wird das komplette Datenwort gleichzeitig gewandelt. Dadurch wird eine maximal mögliche Geschwindigkeit der Ausgabe erreicht.

### 7.7.2.1 Gewichtete Widerstände

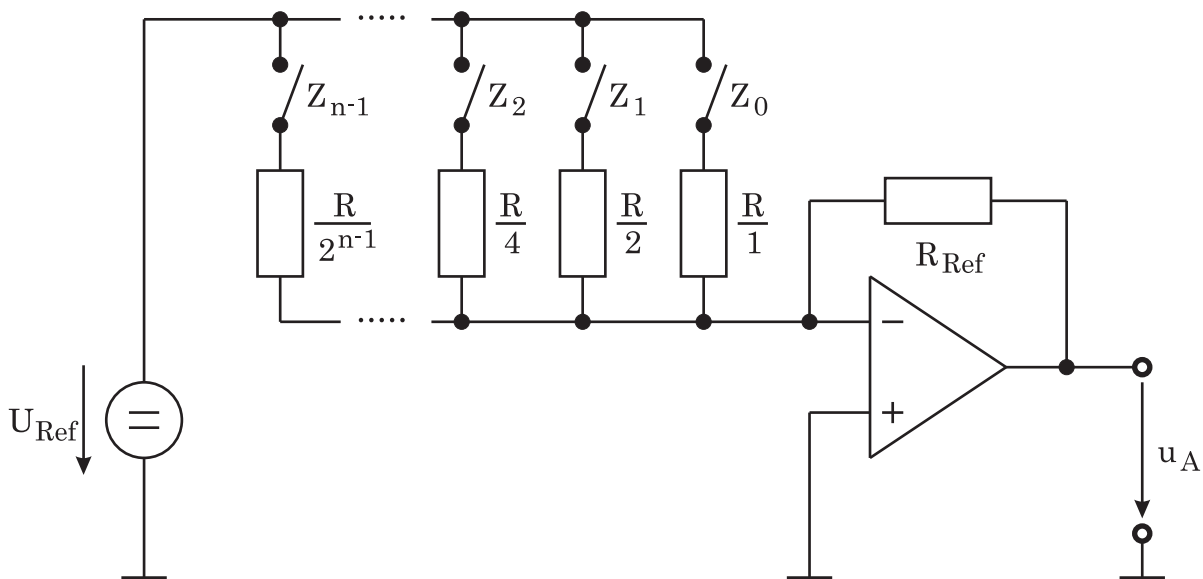


Abbildung 7.18: D/A-Wandler mit gewichteten Widerständen

In Abbildung 7.18 ist ein paralleler D/A-Wandler zu sehen. Der Operationsverstärker ist als invertierender Verstärker geschaltet.

Am Eingang ist für jedes Bit des digitalen Wortes ein Schalter vorhanden. Ist das Bit gleich „1“, so ist der Schalter eingeschaltet.

Eine Spannungsquelle gibt die Referenzspannung  $U_{Ref}$  für den Ausgang vor.

### 7.7.2.2 R-2R Netzwerk

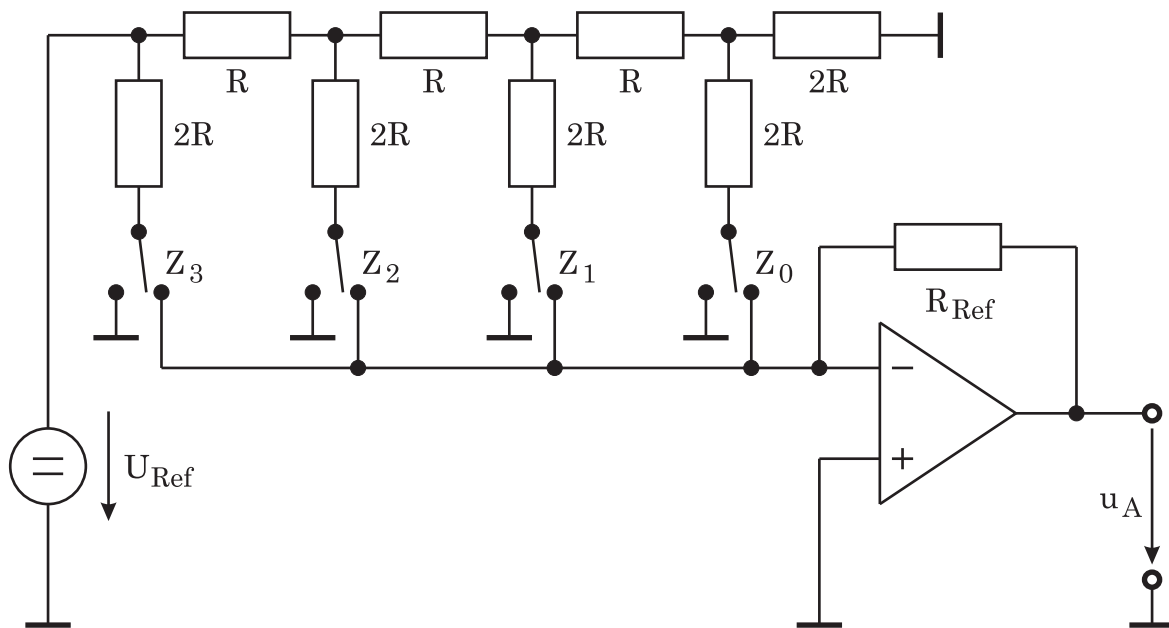


Abbildung 7.19: D/A-Wandler mit R-2R Netzwerk

In Abbildung 7.19 ist eine Variante des Parallelwandlers zu sehen, in dem ein Widerstandsnetzwerk ausschließlich mit den Widerstandswerten  $R$  und  $2 \cdot R$  vorkommt.

Dies hat gegenüber dem D/A-Wandler gemäß Abbildung 7.18 den Vorteil, dass man Widerstände einer Charge verwenden kann, die sich möglichst gleich verhalten. Es gibt auch integrierte Widerstandsarrays zu kaufen, bei denen die Widerstände auf identisches Verhalten optimiert sind. Dadurch kann man die Wandlungsfehler reduzieren.

Ist ein Bit am Eingang gleich „1“, so verbindet der Schalter das Widerstandsnetzwerk mit dem Eingang des Operationsverstärkers. Ist das Eingangsbit gleich „0“, so wird der Schalter gegen Masse geschaltet.

### 7.7.3 Deglitch-Schaltung

Eine Deglitch-Schaltung ist in Abbildung 7.20 dargestellt. Während des Umschaltens zwischen zwei Datenworten eines parallelen D/A-Wandlers kann es kurzzeitig zu einem undefinierten Zustand kommen. Am Ausgang entsteht dadurch ein unerwünschter Spannungsimpuls.

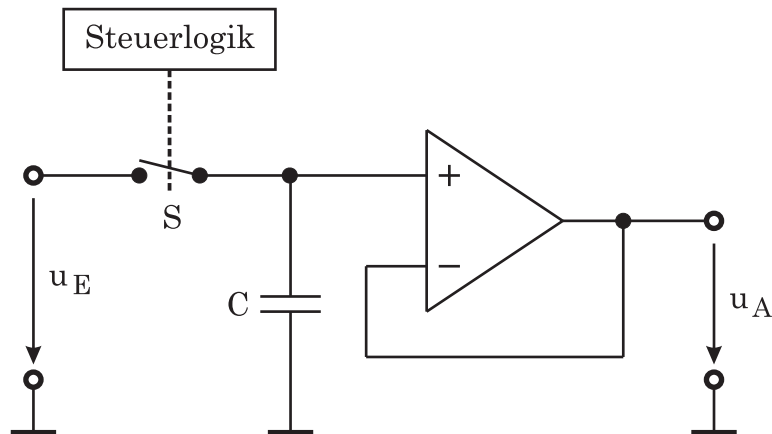


Abbildung 7.20: Deglitch Schaltung für D/A-Wandler

Aus diesem Grund wird nach dem Wandler eine Deglitch-Schaltung geschaltet. Während des Übergangs zwischen zwei Datenworten wird der Schalter  $S$  geöffnet. Der Kondensator  $C$  bestimmt solange die Spannung am Ausgang der Schaltung. Sobald der undefinierte Übergangszustand am Ausgang des D/A-Wandlers vorüber ist, wird der Schalter wieder eingeschaltet und die neue Spannung erscheint am Ausgang der Deglitch-Schaltung.

### 7.7.4 Serielle Wandler

Bei den seriellen Wandlern gemäß Abbildung 7.21 wird der digitale Wert nicht in einem Takt in einen analogen Wert gewandelt.

Der serielle Wandler braucht bei einer Bitbreite von  $n$  Bits für die Wandlung mindestens  $2^n$  Takte.

Aus dem digitalen Wert am Eingang wird in der Steuerlogik ein zeitlicher Verlauf erzeugt, mit dem der Schalter  $S$  ein- und ausgeschaltet wird. Der nachfolgende Tiefpass glättet das Signal und am Ausgang entsteht eine analoge Gleichspannung.

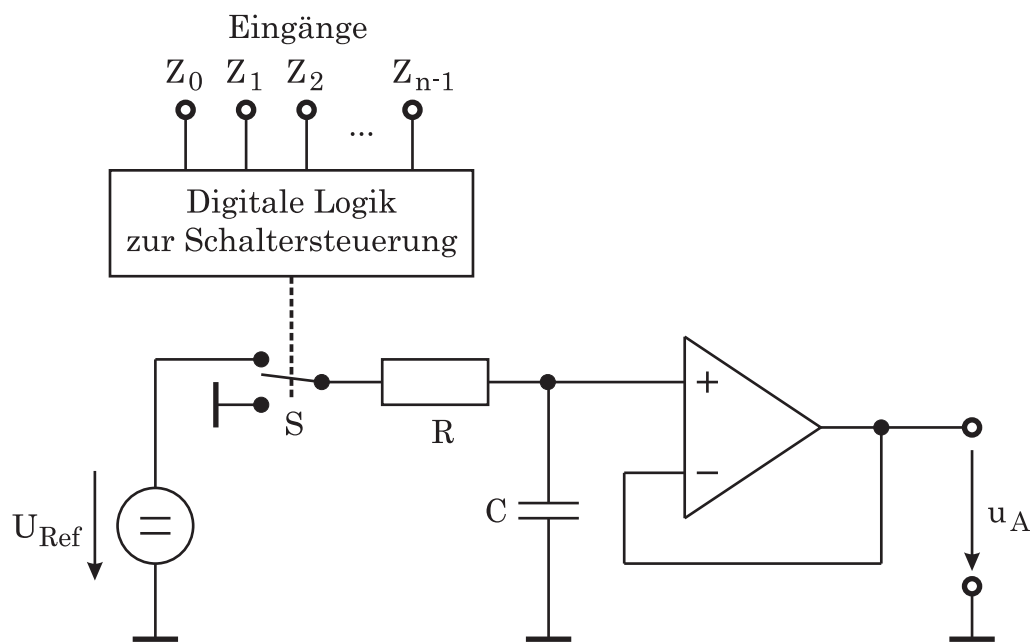


Abbildung 7.21: Serieller D/A-Wandler

# 8 Messbrücken und reale Bauelemente

## 8.1 Reale Bauelemente

Ideale elektrische Bauelemente sind Verallgemeinerungen realer elektrischer Bauelemente mit idealisierten Eigenschaften. Mit idealen elektrischen Bauelementen können reale Bauelemente nachgebildet werden.

Reale Bauelemente haben neben den unmittelbaren Eigenschaften weitere Eigenschaften, die oft unerwünscht sind und vor allem bei höheren Frequenzen an Bedeutung gewinnen. Je nachdem, welche dieser Eigenschaften modelliert werden sollen, sehen die Modelle auch unterschiedlich aus.

Im Folgenden sollen zunächst übliche Modelle für reale Ohmsche Widerstände, Kondensatoren und Spulen im Wechselstromkreis begründet werden.

### 8.1.1 Realer ohmscher Widerstand

Ein realer Widerstand hat neben seinem ohmschen Anteil zusätzlich Streukapazitäten und Induktivitäten, die sich zum Beispiel aus der endlichen Ausdehnung der Zuleitungen und dem gesamten mechanischen Aufbau ergeben. Damit muss der Widerstand zwischen den Klemmen A und B gemäß Abbildung 8.1 durch

$$\underline{Z}_{AB} = R \pm jX \quad (8.1)$$

berechnet werden.

Bei tiefen Frequenzen wird der induktive Anteil sehr klein, der kapazitive Anteil erreicht sehr hohe Werte, so dass der ohmsche Anteil dominiert und  $R \gg X$  gilt. Das Verhältnis aus Imaginärteil und Realteil des komplexen Widerstandes  $\underline{Z}_{AB}$  wird auch als Fehlwinkel  $\epsilon$  bezeichnet. Es gilt

$$\tan \epsilon = \frac{\operatorname{Im}\{\underline{Z}_{AB}\}}{\operatorname{Re}\{\underline{Z}_{AB}\}}. \quad (8.2)$$

Weiterhin kann sich der Widerstand eines Leiters mit steigender Frequenz erhöhen. Man spricht vom Skin-Effekt, der Stromverdrängung aus dem Leiterinneren durch Wirbelströme. Dadurch verringert sich der tatsächlich nutzbare Leiterquerschnitt und der Widerstand der Leitung steigt. Diesem Effekt kann bei Hochfrequenzanwendungen durch Verwendung von Litzenleitern entgegengewirkt werden.

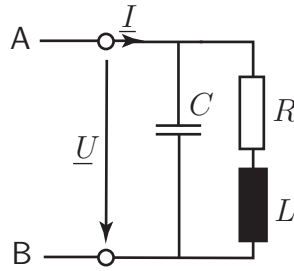


Abbildung 8.1: Realer Widerstand: Ersatzschaltbild

### 8.1.2 Der reale Kondensator

Die Strom-Spannungs-Beziehung des idealen Kondensators lautet

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} \quad (8.3)$$

In der komplexen Darstellung gilt entsprechend

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} \quad (8.4)$$

Berücksichtigt man zusätzlich die Verluste im Kondensator, so ergibt sich eine Parallelschaltung aus dem Verlustwiderstand  $R_{CP}$  und idealer Kapazität  $C$  wie in Abbildung 8.2 a) dargestellt.

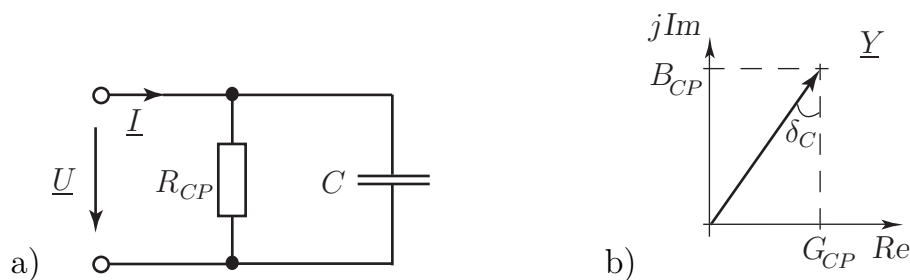


Abbildung 8.2: Realer Kondensator: Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm in der komplexen Leitwertebene

Auch der Verlustwiderstand ist lediglich ein Modell für die Verluste des realen Kondensators. Er ist ein symbolisches konzentriertes Element für die Verluste  $P_V$ . Dabei können folgende Verlustarten berücksichtigt werden:

- **Isolationsverluste**  $P_{Iso}$  – Ableitstrom über die Umhüllung, Selbstentladung über das Dielektrikum
- **Dielektrische Verluste**  $P_{Diel}$  – Polarisationsverluste, entstehen durch wechselnde Polarisation der Isolatoratome, proportional zur Frequenz

Es gilt

$$P_V = P_{Iso} + P_{Diel} \quad \text{und} \quad R_{CP} = R_{Iso} + R_{Diel} . \quad (8.5)$$

Aufgrund der Parallelschaltung ist es sinnvoll, nicht die komplexe Ebene  $\underline{Z}$  sondern die Leitwertebene  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$  zu betrachten. Das Zeigerdiagramm des realen Kondensators in der komplexen Leitwertebene ist in Abbildung 8.2 b) dargestellt. Dabei gilt

$$G_{CP} = \frac{1}{R_{CP}} \quad - \text{Verlustleitwert} \quad (8.6)$$

$$B_{CP} = \omega C \quad - \text{Blindleitwert} . \quad (8.7)$$

Den Winkel  $\delta_C$  in der Abbildung 8.2 b) bezeichnet man als Verlustwinkel eines Kondensators. Für ihn gilt

$$\tan \delta_C = \frac{G_{CP}}{B_{CP}} . \quad (8.8)$$

Wegen der Proportionalität der dielektrischen Verluste zur Frequenz ist  $G_{CP}$  ebenfalls proportional zur Frequenz. Wegen (8.7) ist der Verlustwinkel fast unabhängig von der Frequenz.

Zudem gilt für kleine  $\delta_C$ :  $\tan \delta_C \approx \delta_C$  und damit

$$\delta_C = \frac{G_{CP}}{\omega C} . \quad (8.9)$$

Eine weitere Größe zur Beschreibung der Verluste eines realen Bauelementes ist die Güte

$$Q_C = \frac{1}{\tan \delta} = \frac{B_{CP}}{G_{CP}} = \omega R_{CP} C . \quad (8.10)$$

Für verlustarme Kondensatoren gilt  $Q_C = (3 \dots 10) \cdot 10^3$ , während für Standardbauformen  $Q_C = 30 \dots 60$  gilt.

### 8.1.3 Die reale Spule

Grundlage für das Verständnis der Wirkungsweise von Spulen ist das Induktionsgesetz

$$u_i = - \frac{d\Phi}{dt} , \quad (8.11)$$

welches besagt, dass die längs einer geschlossenen Linie induzierte Spannung  $u_i$  gleich dem zeitlichen Differentialquotienten des umfassten magnetischen Flusses  $\Phi$

ist.

Unter der Voraussetzung, dass alle Windungen der Spule  $N$  vom gleichen Fluss durchsetzt werden, kann die Induktivität durch

$$L = \frac{N\Phi}{i} \quad (8.12)$$

definiert werden. Damit ergibt sich die Strom-Spannungs-Beziehung

$$u = L \cdot \frac{di}{dt} . \quad (8.13)$$

Folglich tritt nur bei zeitveränderlichem Strom ein von Null verschiedene Spannung auf.

Berücksichtigt man zusätzlich die Wicklungs- und Kernverluste in technischen Spulen, so ergibt sich zunächst eine Reihenschaltung aus dem Verlustwiderstand  $R_L$  und idealer Spule  $L$  gemäß Abbildung 8.3 a). Eine genauere Modellierung ergibt das in Abbildung 8.3 b) dargestellte Ersatzschaltbild mit  $R_{Cu}$  und  $R_{Fe}$ . Der Ersatzwiderstand  $R_{Cu}$  beschreibt die Ohmschen Verluste in den Wicklungen. Sie werden deshalb als Kupferverluste bezeichnet. Die Verluste im Eisenkern werden durch den Widerstand  $R_{Fe}$  abgebildet. Bei Luftspulen entfallen die Eisenverluste.

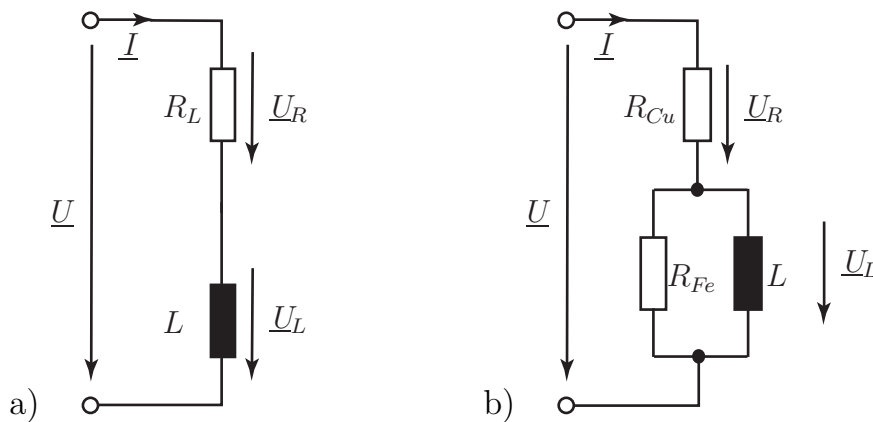


Abbildung 8.3: Reale Spule: Ersatzschaltbilder verschiedener Modellierungstiefe

Die Modellierung gemäß Abbildung 8.3 b) lässt sich in die Reihenschaltung aus einem Verlustwiderstand und einer idealen Spule gemäß Abbildung 8.3 a) umrechnen.

Anhand des in Abbildung 8.3 a) dargestellten Ersatzschaltbildes in der komplexen Z-Ebene kann analog zum realen Kondensator ein frequenzunabhängiger Verlustwinkel

$$\tan \delta_L = \frac{\operatorname{Re}\{\underline{Z}_{AB}\}}{\operatorname{Im}\{\underline{Z}_{AB}\}} = \frac{R_L}{X_L} \quad (8.14)$$



definiert werden (vergleiche Abbildung 8.4).

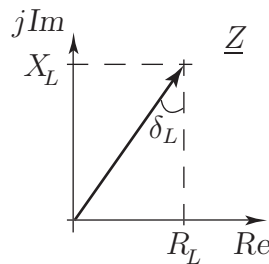


Abbildung 8.4: Reale Spule: Zeigerdiagramm in der komplexen Ebene

Für die Güte gilt dann wieder

$$Q_L = \frac{1}{\tan \delta} = \frac{X_L}{R_L} = \frac{\omega L}{R_L} . \quad (8.15)$$

Für Luftspulen gibt es naturgemäß keine Eisenverluste, die Güte  $Q_L$  beträgt typischerweise 50...500. Bei Spulen mit Eisenkern gilt  $Q_L \sim 10$  .

### Verluste in der Spule

Kupferverluste entstehen durch den Ohmschen Widerstand der Wicklungen einer Spule. Wegen der dadurch entstehenden Erwärmung werden diese Verluste auch als Stromwärmeverluste bezeichnet. Sie steigen quadratisch mit der Belastung an:

$$P_{Cu} = I^2 \cdot R_{Cu} . \quad (8.16)$$

Die Eisenverluste setzen sich aus Wirbelstrom- und Hystereseverlusten zusammen

$$P_{Fe} = P_W + P_{Hy} . \quad (8.17)$$

Sie können gemäß Abbildung 8.3 b) mit

$$P_{Fe} = \frac{U_L^2}{R_{Fe}} \quad (8.18)$$

berechnet werden.

#### Wirbelstromverluste:

Änderungen im magnetischen Fluss verursachen in massivem Leitermaterial Ströme – die Wirbelströme. Deren Stärke wird durch die Größe der induzierten Spannung und die elektrische Leitfähigkeit  $\kappa_{Fe}$  des Materials bestimmt. Die von den

Wirbelströmen entwickelte Wärme bezeichnet man als Wirbelstromverlust  $P_W$ . Es gilt

$$P_W \sim \kappa_{Fe} \cdot V_{Fe} \cdot \omega^2 \cdot B_{max}^2 \quad (8.19)$$

mit

$\kappa_{Fe}$  – elektrische Leitfähigkeit

$V_{Fe}$  – Volumen des massiven Leitermaterials

$\omega$  – Frequenz des magnetischen Flusses

$B_{max}$  – Maximalwert der Flussdichte

Wirbelströme sind bei Spulen, Motoren und Transformatoren unerwünscht, werden aber bei der Wirbelstrombremse oder dem Induktionsherd auch nutzbringend eingesetzt. Eine Verringerung der Wirbelströme erreicht man durch einen lamellierten Aufbau, also den Ersatz eines massiven Eisenkerns durch ein Paket gegeneinander isolierter Bleche.

Hystereseverluste:

Ein Hystereseverhalten tritt bei ferromagnetischen Stoffen wie Eisen, Kobalt und Nickel auf. Bei der erstmaligen Magnetisierung eines Materials wird dieses durch allmähliches Vergrößern der Stromstärke einer magnetischen Feldstärke  $H$  ausgesetzt. Dadurch entsteht eine magnetischer Flussdichte  $B$  in Abhängigkeit von  $H$  – die sogenannte Neukurve (Ziffer ① in Abbildung 8.5). Beim allmählichem Verkleinern des Stromes auf Null fällt nur ein Teil der Molekularmagnete wieder in die ursprüngliche Lage zurück. Deshalb bleibt ein gewisser Restmagnetismus, die Flussdichte  $B_R$ , obwohl durch die Spule kein Strom mehr fließt ( $H = 0$ ). Sie wird als Remanenz bezeichnet und gibt an, wie stark ein Dauermagnet magnetisiert bleibt.

Um die Remanenz  $B_R$  zu beseitigen, muss Strom in entgegengesetzter Richtung durch die Spule fließen. Erst bei der Koerzitiv-Feldstärke  $H_K$  verschwindet der remanente Magnetismus ( $B = 0$ ). Die Koerzitiv-Feldstärke  $H_K$  gibt damit an, welchen Widerstand gegen Entmagnetisierung ein Werkstoff hat.

Die Erscheinung, dass die magnetische Flussdichte stets hinter der sie erzeugenden magnetischen Feldstärke zurück bleibt, wird als Hysterese bezeichnet. Die zeichnerische Darstellung heißt Hystereseschleife.

Anschaulich ergibt sich, dass die magnetische Flussdichte  $B$  bei einem bestimmten Wert der Feldstärke  $H$  zwei Werte einnehmen kann. Bei zunehmender Feldstärke (Ziffer ③ in Abbildung 8.5) ist er niedriger als bei abnehmender Feldstärke (Ziffer ② in Abbildung 8.5).

Wenn Materialien ummagnetisiert werden, muss Energie für die veränderte Ausrichtung der Weiss-Bezirke aufgewendet werden. Dieses Drehen verursacht Wärmeentwicklung im Material. Die Verluste sind im Allgemeinen proportional zu der Fläche innerhalb der Hysteresekurve und der Frequenz, mit der ummagnetisiert

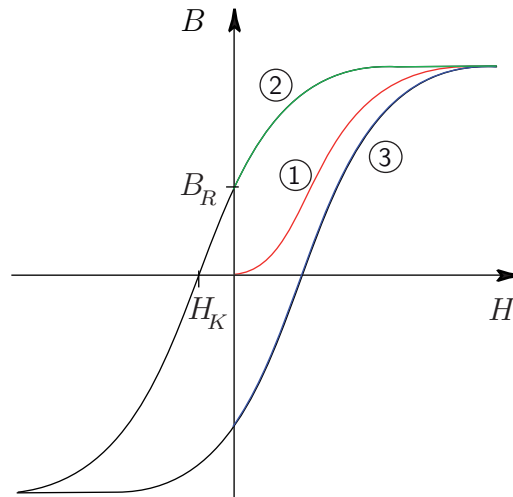


Abbildung 8.5: Hysteresekurve

wird. Es gilt

$$P_{Hy} \sim V_{Fe} \cdot \omega \cdot B_{max}^2 \quad (8.20)$$

mit

$V_{Fe}$  – Volumen des massiven Leitermaterials

$\omega$  – Frequenz des magnetischen Flusses

$B_{max}$  – Maximalwert der Flussdichte .

Dabei ist zu beachten, dass die Hysteresekurve selbst nicht statisch festliegt, sondern sich mit wachsender Frequenz bis zu einem Oval verengt.

Sogenanntes magnetisch weiches Eisen wird für Elektromagnete und als Dynamo-blech für elektrische Maschinen und Transformatoren eingesetzt und hat dementsprechend eine schmale und steile Hystereseschleife, um die Remanenz  $B_R$  und Koerzitivfeldstärke  $H_K$  und damit die Verluste möglichst klein zu halten.

Für Dauermagnete wird magnetisch harter Stahl mit möglichst großer Remanenz  $B_R$  und Koerzitivfeldstärke  $H_K$ , also einer breiten Hystereseschleife gewünscht. Damit wird gesichert, dass der Magnet stark magnetisiert bleibt und auch bei starken entmagnetisierenden Einflüssen seinen Magnetismus behält.

### Messung des Verlustwinkels

Der Verlustwinkel wird durch die Bestimmung von Strom und Spannung durch das reale Bauelement und die tatsächlich aufgenommene Leistung ermittelt (vergleiche Abbildung 8.6). Die Phasenverschiebung  $\varphi$ , die durch das reale Bauelement mit

dem komplexen Widerstand  $\underline{Z}$  verursacht wird, kann aus diesen Messungen mittels

$$\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I} \quad (8.21)$$

bestimmt werden. Mit

$$\delta = 90^\circ - \varphi \quad (8.22)$$

kann der Verlustwinkel ermittelt werden.

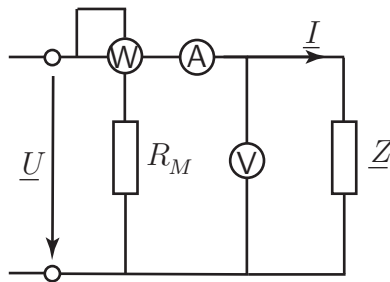


Abbildung 8.6: Messanordnung zur Bestimmung des Verlustwinkels

Für den realen Kondensator gilt dann

$$G_{CP} = \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} = Y \cdot \cos \varphi \quad \text{mit} \quad Y = \frac{I}{U} \quad (8.23)$$

$$B_{CP} = \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = Y \cdot \sin \varphi \quad (8.24)$$

und entsprechend für die reale Spule

$$R_L = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} = Z \cdot \cos \varphi \quad \text{mit} \quad Z = \frac{U}{I} \quad (8.25)$$

$$X_L = \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = Z \cdot \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad L_S = \frac{X_L}{\omega}. \quad (8.26)$$

Den Widerstand  $R_{Cu}$  bestimmt man durch eine Gleichspannungsmessung: Für den Widerstand  $R_{Fe}$ , der die Verluste im Eisenkern repräsentiert, gilt  $R_{Fe} = R_L - R_{Cu}$ , wenn man beide Widerstände als Reihenschaltung modelliert.

## 8.2 Warum Messbrücken?

Die Brückenschaltung ist eine der weitverbreitetsten Schaltungen, wenn es darum geht Sensorsignale kleiner Amplitude zuverlässig zu erfassen. Sie besteht im Wesentlichen aus zwei zueinander parallelen Spannungsteilern aus jeweils zwei Widerständen. Das Spannungsmessgerät stellt zwischen diesen eine Querbeziehung her,

die der Schaltung den Namen Brückenschaltung gibt. Die unmittelbar gemessene Größe der Anordnung ist der Spannungsunterschied zwischen den Spannungsteilern, auch Diagonalspannung oder Brückenquerspannung genannt.

Mit Messbrücken kann man Widerstände oder Widerstandsänderungen messen. Diese können sehr klein sein. Man kann Messbrücken nach zwei Abgleichtypen unterscheiden:

- Bei **Abgleichmessbrücken** werden die Elemente der Messbrücke solange abgeglichen bis die Diagonalspannung  $U_D = 0V$  ist. Ist diese Abgleichbedingung erfüllt, so fließt kein Strom in der Diagonale, d.h. das Messergebnis wird nicht vom Innenwiderstand des Voltmeters verfälscht.  
Vorteil: Messung mit dem Voltmeter in der Diagonale kann im kleinsten Messbereich erfolgen, Brücke kann sehr genau abgeglichen werden  
Nachteil: zwei veränderbare Bauteile erforderlich
- Bei **Ausschlagmessbrücken** wird die Brücke nicht abgeglichen. Es ist eine kleine Diagonalspannung vorhanden, die gemessen wird.  
Vorteil: Es sind keine abzugleichenden Elemente vorhanden  
Nachteil: Messfehler durch Voltmeter (Genauigkeit, Strom im Diagonalzweig der Messbrücke durch endlichen Innenwiderstand)

## 8.3 Gleichspannungsmessbrücken

### 8.3.1 Abgleichmessbrücken

#### 8.3.1.1 Wheatstone-Messbrücke

Die einfachste Gleichspannungs-Messbrücke (oder Gleichstrom-Messbrücke) ist die Wheatstone-Brücke gemäß Abbildung 8.7. Sie besteht aus vier Widerständen, die als zwei parallele Spannungsteiler angeordnet sind.

Ist die Wheatstone-Brücke abgeglichen, dann ist  $U_D = 0V$ . Dann fließt kein Strom im Diagonalzweig und damit sind die Spannungsteiler voneinander entkoppelt, so dass man sie getrennt betrachten kann. Nachfolgend wird die untere Masche betrachtet, alternativ ist auch die Berechnung der oberen Masche möglich. Es ergibt sich das gleiche Ergebnis.

Der linke Spannungsteiler besteht aus den Widerständen  $R_1$  und  $R_2$ . Die Spannung an  $R_2$  kann man beschreiben als

$$U_2 = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} . \quad (8.27)$$

Die Spannung an  $R_4$  ergibt sich dementsprechend zu

$$U_4 = U_0 \frac{R_4}{R_3 + R_4} . \quad (8.28)$$

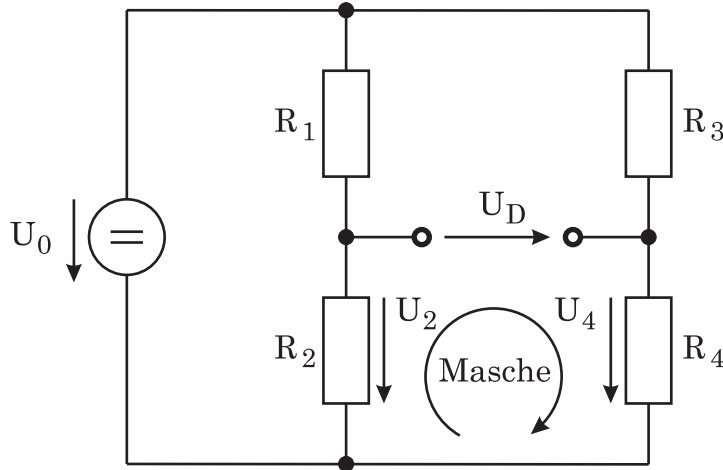


Abbildung 8.7: Wheatstone-Messbrücke

Ist die Brücke abgeglichen, so folgt

$$U_2 = U_4 \quad (8.29)$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \quad (8.30)$$

Formt man (8.30) um, so folgt

$$R_2(R_3 + R_4) = R_4(R_1 + R_2) \quad (8.31)$$

$$R_2R_3 + R_2R_4 = R_4R_1 + R_4R_2 \quad (8.32)$$

$$R_2R_3 = R_4R_1 \quad (8.33)$$

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}} \quad (8.34)$$

(8.34) wird als Abgleichbedingung für die Wheatstone-Brücke bezeichnet. Wenn die Abgleichbedingung erfüllt ist, dann ist die Diagonalspannung  $U_D = 0V$ .

### 8.3.1.2 Thomson-Messbrücke

Bei der Messung kleiner Widerstände hat die Wheatstone-Brücke einen entscheidenden Nachteil. Man misst die Zuleitungs- und Übergangswiderstände des zu messenden Widerstandes mit. Diese können in der gleichen Größenordnung wie der zu messende Widerstand sein und verfälschen damit das Messergebnis gravierend. Um diesen Nachteil zu beseitigen, wurde die Thomson-Messbrücke entwickelt. !

In Abbildung 8.8 ist eine Thomson-Brücke dargestellt. Der obere Stromkreis ist sehr niederohmig, da  $R_X$  und  $R_N$  sehr niederohmig sind. Die Widerstände  $R$  sollen die Zuleitungs- und Übergangswiderstände darstellen.

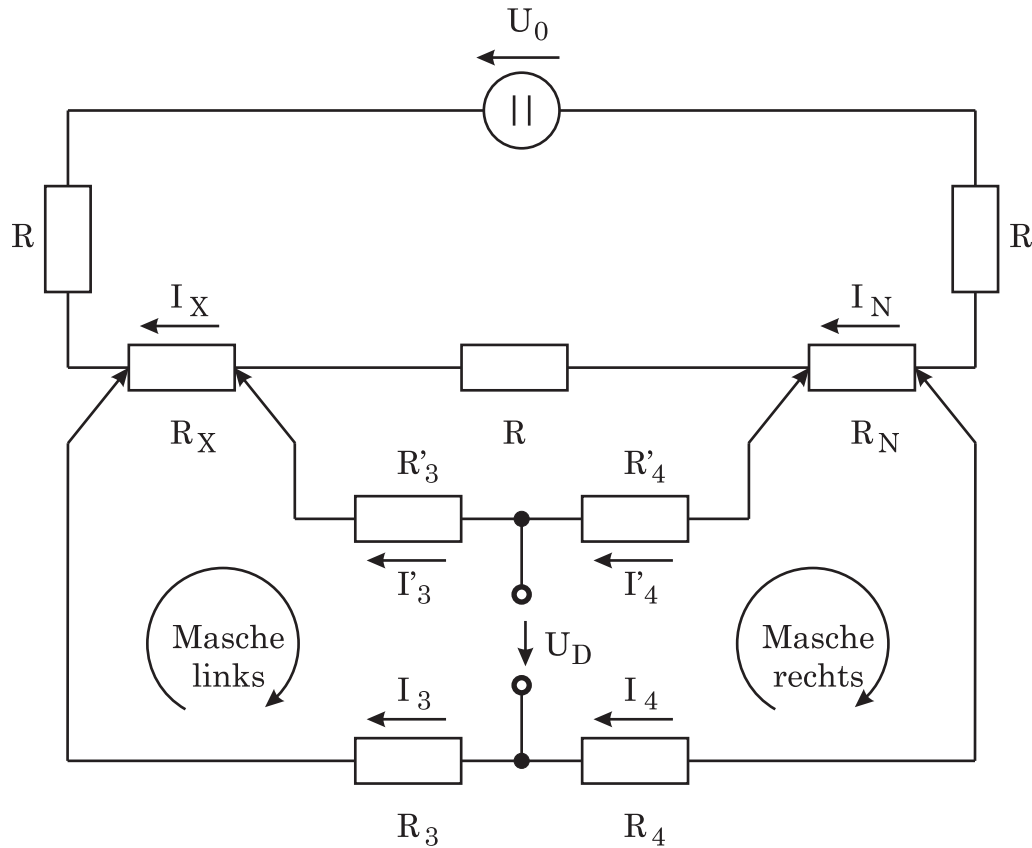


Abbildung 8.8: Thomson-Messbrücke

Die eigentliche Messbrücke besteht aus den Widerständen  $R_3$ ,  $R'_3$ ,  $R_4$  und  $R'_4$  und ist deutlich hochohmiger. Die Anschlüsse dieser Brücke sind direkt an  $R_X$  und  $R_N$  angebracht, was durch die Pfeile angedeutet sein soll. Dadurch werden die Übergangswiderstände  $R$  nicht mit gemessen.

Es wird hier nur der Fall des Abgleichs betrachtet  $U_D = 0V$  und  $I_D = 0A$ . Dann ist der Strom durch  $R'_3$  gleich groß wie der Strom durch  $R'_4$ . Aus diesem Grund ist der Strom durch  $R_N$  gleich groß wie der Strom durch  $R_X$ .

Der Strom durch  $R_3$  ist ebenfalls gleich groß wie der Strom durch  $R_4$ .

Folglich gilt:

$$I_3 = I_4 \quad I'_3 = I'_4 \quad I_X = I_N . \quad (8.35)$$

Die Abgleichwiderstände der Brückenschaltung sind miteinander gekoppelt, so dass gilt:

$$R_3 = R'_3 \quad R_4 = R'_4 . \quad (8.36)$$

Für die Ableitung der Abgleichbedingung wird zuerst die rechte Masche der Brücke betrachtet. Schreibt man die Maschengleichung mittels Widerständen und Strömen, so ergibt sich:

$$I_X R_N + I'_4 R_4 = I_4 R_4 \quad \Rightarrow \quad I_X R_N = R_4 (I_4 - I'_4) . \quad (8.37)$$

Für die linke Masche ergibt sich analog:

$$I_X R_X + I'_4 R_3 = I_4 R_3 \quad \Rightarrow \quad I_X R_X = R_3 (I_4 - I'_4) . \quad (8.38)$$

Dividiert man (8.37) durch (8.38), so ergibt sich die Abgleichbedingung:

$$\frac{I_X R_N}{I_X R_X} = \frac{R_4 (I_4 - I'_4)}{R_3 (I_4 - I'_4)} \quad (8.39)$$

$$\frac{R_N}{R_X} = \frac{R_4}{R_3} \quad (8.40)$$

$$\boxed{R_X = R_N \frac{R_3}{R_4}} \quad (8.41)$$

Die Abgleichbedingung (8.41) ähnelt der Abgleichbedingung der Wheatstone-Brücke, nun ist aber das Verhältnis der Abgleichwiderstände in den Zweigen fixiert und die Widerstände der Zuleitungen werden zusätzlich berücksichtigt.

### 8.3.2 Ausschlagmessbrücken

Bei diesen Messbrücken wird die Diagonalspannung nicht auf  $U_D = 0V$  abgeglichen. Es bleibt eine Restspannung, die gemessen wird.

Die Abgleichbedingung der Wheatstone-Brücke kann folglich nicht mehr benutzt werden und es fließt ein Strom im Diagonalzweig  $I_D$  durch das Voltmeter. Damit sind die beiden Spannungsteiler nicht mehr unabhängig voneinander. Will man diese Ausschlagbrücke korrekt berechnen, so muss man diesen Diagonalstrom berücksichtigen.

Hier wird angenommen, dass ein hochohmiger Spannungsmesser eingesetzt wird, so dass der Diagonalstrom vernachlässigt werden kann. Die beiden Brückenarme können dann wieder als unabhängige Spannungsteiler angenommen werden. Dadurch wird die Rechnung deutlich vereinfacht. !

In der Messbrücke in Abbildung 8.9 ist ein veränderlicher Widerstand ( $R + \Delta R$ ) vorhanden. Betrachtet man die untere Masche der Brücke, so gilt

$$U_D = U_2 - U_4 \quad (8.42)$$

$$U_D = U_0 \left( \frac{R + \Delta R}{R + R + \Delta R} - \frac{R}{R + R} \right) \quad (8.43)$$

$$U_D = U_0 \left( \frac{R + \Delta R}{2R + \Delta R} - \frac{1}{2} \right) \quad (8.44)$$

$$U_D = U_0 \left( \frac{\frac{1}{2} + \frac{\Delta R}{2R}}{1 + \frac{\Delta R}{2R}} - \frac{1}{2} \right) . \quad (8.45)$$

Nun nimmt man an, dass

$$\frac{\Delta R}{2R} \ll 1$$



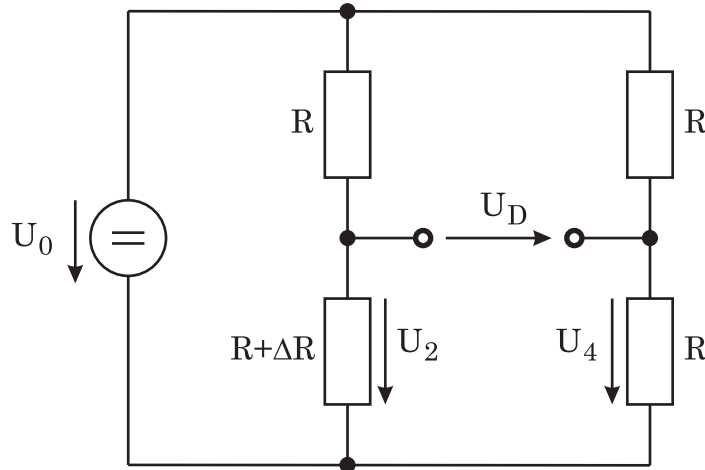


Abbildung 8.9: Ausschlag-Messbrücke mit einem veränderlichen Widerstand

ist. Damit ist die folgende Näherung für den Bruch in (8.45) zulässig:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x \quad \text{für } x \ll 1$$

Für die Diagonalspannung gilt dann:

$$U_D \approx U_0 \left( \left( \frac{1}{2} + \frac{\Delta R}{2R} \right) \left( 1 - \frac{\Delta R}{2R} \right) - \frac{1}{2} \right) \quad (8.46)$$

$$U_D \approx U_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{\Delta R}{4R} + \frac{\Delta R}{2R} - \underbrace{\frac{\Delta R^2}{4R^2}}_{\rightarrow 0 \text{ für } \Delta R \ll R} - \frac{1}{2} \right) \quad (8.47)$$

$$\boxed{U_D \approx U_0 \frac{\Delta R}{4R}} \quad \text{für } \Delta R \ll R \quad (8.48)$$

(8.48) beschreibt die Diagonalspannung für eine Ausschlagbrücke mit einem veränderlichen Widerstand und  $\Delta R \ll R$ . Ist  $\Delta R$  in der gleichen Größenordnung wie  $R$ , so muss die Brücke ohne Näherungen durchgerechnet werden.

Es kann auch sein, dass **zwei** veränderliche Widerstände in der Messbrücke vorhanden sind. In Abbildung 8.10 ist ein Beispiel dafür dargestellt. Es wird nachfolgend berechnet.

Andere Anordnungen können analog behandelt werden. Man berechnet wieder die

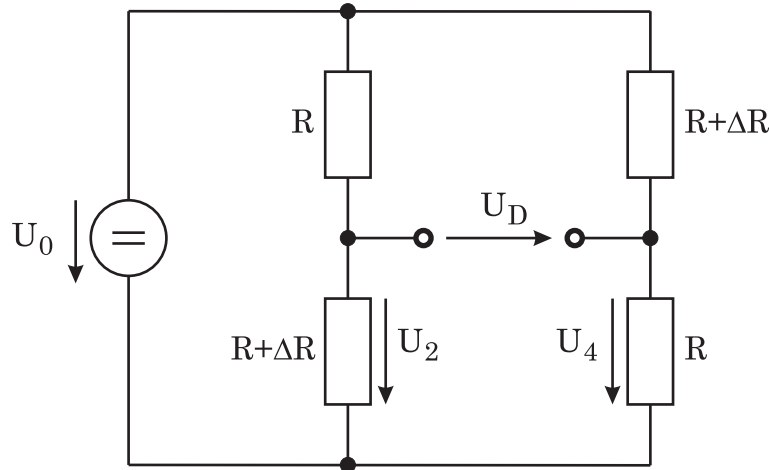


Abbildung 8.10: Ausschlag-Messbrücke mit zwei veränderlichen Widerständen

beiden Spannungsteiler:

$$U_D = U_2 - U_4 \quad (8.49)$$

$$U_D = U_0 \left( \frac{R + \Delta R}{R + R + \Delta R} - \frac{R}{R + R + \Delta R} \right) \quad (8.50)$$

$$U_D = U_0 \left( \frac{R + \Delta R}{2R + \Delta R} - \frac{R}{2R + \Delta R} \right) \quad (8.51)$$

$$U_D = U_0 \left( \frac{R + \Delta R - R}{2R + \Delta R} \right) \quad (8.52)$$

$$U_D = U_0 \frac{\Delta R}{2R + \Delta R} \quad (8.53)$$

$$\boxed{U_D \approx U_0 \frac{\Delta R}{2R}} \quad \text{für } \Delta R \ll R \quad (8.54)$$

(8.53) stellt wieder eine Näherung für kleine  $\Delta R$  dar.

Es sind auch Schaltungen mit **vier** veränderbaren Widerständen denkbar, wie in Abbildung 8.11 dargestellt. Die Diagonalspannung wird dann wie folgt berechnet:

$$U_D = U_2 - U_4 \quad (8.55)$$

$$U_D = U_0 \left( \frac{R + \Delta R}{R + \Delta R + R - \Delta R} - \frac{R - \Delta R}{R + \Delta R + R - \Delta R} \right) \quad (8.56)$$

$$U_D = U_0 \frac{R + \Delta R - R + \Delta R}{2R} \quad (8.57)$$

$$U_D = U_0 \frac{2\Delta R}{2R} \quad (8.58)$$

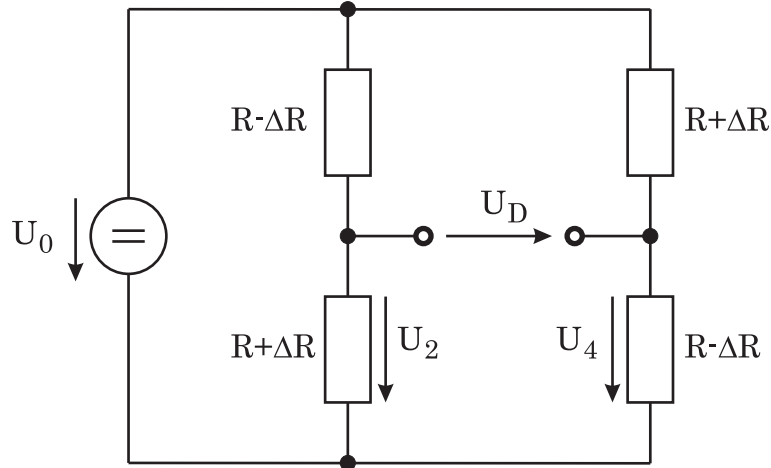


Abbildung 8.11: Ausschlag-Messbrücke mit vier veränderlichen Widerständen

$$U_D = U_0 \frac{\Delta R}{R} \quad (8.59)$$

(8.59) ist keine Näherung für die Diagonalspannung  $U_D$  und somit für alle  $\Delta R$  gültig.

## 8.4 Wechselspannungsmessbrücken

### 8.4.1 Abgleichmessbrücken

#### 8.4.1.1 Abgleichbedingung

Anstatt einer Gleichspannungsquelle kann man auch eine Wechselspannungsquelle zur Versorgung der Messbrücke verwenden. Dann erhält man eine Wechselspannungsbrücke (oder Wechselstrombrücke) gemäß Abbildung 8.12 .

Im Abgleichfall ist wieder  $U_D = 0V$  und damit  $I_D = 0A$ . Folglich fließt im Diagonalzweig kein Strom und die Brücke kann man als zwei unabhängige Spannungsteiler betrachten.

Die Diagonalspannung wird ähnlich wie bei der Gleichspannungsbrücke berechnet:

$$U_D = U_2 - U_4 = U_0 \cdot \left( \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \right) = 0 \quad (8.60)$$

$$Z_2 (Z_3 + Z_4) = Z_4 (Z_1 + Z_2) \quad (8.61)$$

$$Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 = Z_4 Z_1 + Z_4 Z_2 \quad (8.62)$$

$$Z_2 Z_3 = Z_4 Z_1 \quad (8.63)$$

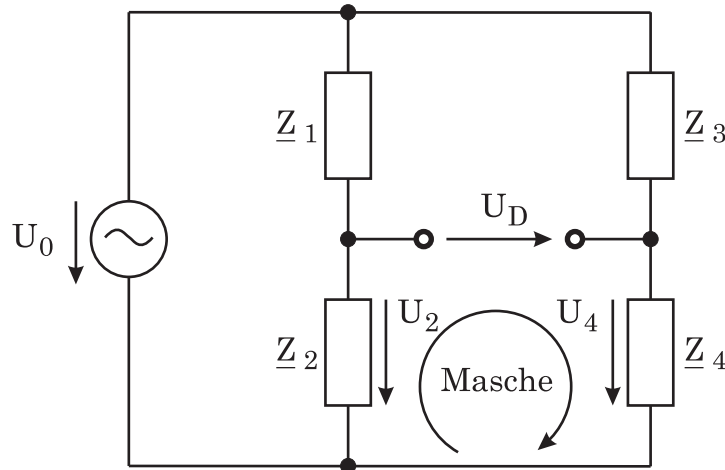


Abbildung 8.12: Wechselspannungsbrücke

Damit ergibt sich als allgemeine Abgleichbedingung für eine Wechselspannungsbrücke:

$$\boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}} \quad (8.64)$$

Dies ist eine Gleichung mit komplexen Zahlen. Soll sie erfüllt sein, so müssen beide Komponenten der komplexen Zahlen gleich sein. Spaltet man (8.64) entsprechend auf, so bekommt man zwei Abgleichbedingungen – hinsichtlich **Betrag und Phase** :

$$\frac{Z_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{Z_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{Z_3 \cdot e^{j\varphi_3}}{Z_4 \cdot e^{j\varphi_4}} \quad (8.65)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{Z_3}{Z_4} \cdot e^{j(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (8.66)$$

In (8.66) müssen also sowohl die Beträge als auch die Phasen gleich sein, um die Abgleichbedingung (8.64) zu erfüllen. Es ergeben sich folglich zwei Abgleichbedingungen, die beide erfüllt sein müssen:

$$1. \text{ Abgleichbedingung: } \boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}} \quad (8.67)$$

$$2. \text{ Abgleichbedingung: } \boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4} \quad (8.68)$$

Man kann (8.64) auch in die Form mit getrennten **Real- und Imaginärteilen** bringen. Dann lautet sie:

$$R_A + j \cdot X_A = R_B + j \cdot X_B \quad (8.69)$$

Nun müssen sowohl die Real- als auch die Imaginärteile auf beiden Seiten gleich sein und man erhält:

$$1. \text{ Abgleichbedingung: } \boxed{R_A = R_B} \quad (8.70)$$

$$2. \text{ Abgleichbedingung: } \boxed{X_A = X_B} \quad (8.71)$$

Welche Version der Abgleichbedingungen man nimmt, hängt von der vorhergehenden Rechnung ab. Rechnet man die Wechselspannungsbrücke mit Widerständen, Spulen und Kondensatoren, so ist meist die Verwendung von Real- und Imaginärteil besser. !

Im Gegensatz zur Gleichspannungsbrücke hat man hier zwei Abgleichbedingungen und kann damit zwei unbekannte Größen bestimmen. !

#### 8.4.1.2 Wien-Brücke

Eine Version der Wechselspannungsbrücke ist die Wien-Brücke. Mit ihr kann man verlustbehaftete Kondensatoren berechnen. Auch bei der Wien-Brücke gibt es eine Reihe von Varianten, von denen hier zwei betrachtet werden.

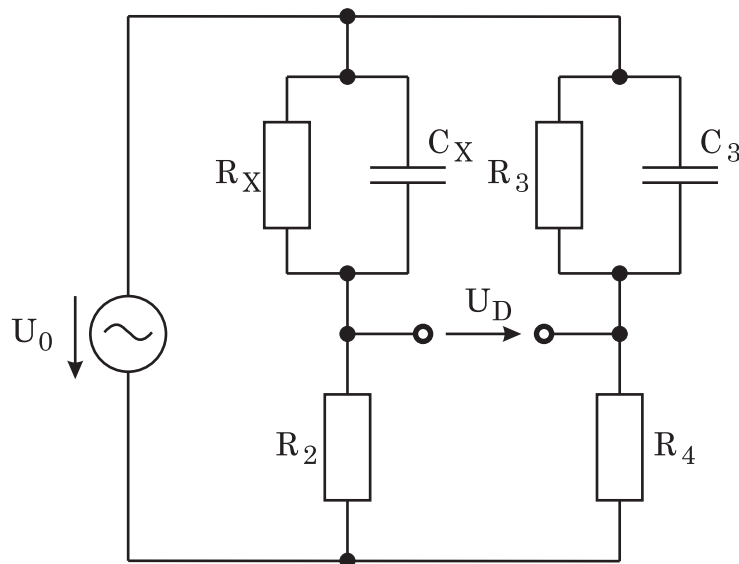


Abbildung 8.13: Wien-Brücke, Variante 1

Bei der **Variante 1** gemäß Abbildung 8.13 wird der unbekannte verlustbehaftete Kondensator durch eine Parallelschaltung von  $C$  und  $R$  angenähert. Für die

Abgleichbedingung ergibt sich:

$$R_2 \underline{Y}_X = R_4 \underline{Y}_3 \quad (8.72)$$

$$R_2 \left( \frac{1}{R_X} + j\omega C_X \right) = R_4 \left( \frac{1}{R_3} + j\omega C_3 \right) \quad (8.73)$$

$$\underbrace{\frac{R_2}{R_X}}_{\text{Real}} + \underbrace{j\omega R_2 C_X}_{\text{Imag}} = \underbrace{\frac{R_4}{R_3}}_{\text{Real}} + \underbrace{j\omega R_4 C_3}_{\text{Imag}} \quad (8.74)$$

Hier werden anstelle der Impedanzen  $\underline{Z}_X$  und  $\underline{Z}_3$  die Admittanzen  $\underline{Y}_X$  und  $\underline{Y}_3$  benutzt, da dadurch die Rechnung einfacher wird. Die Real- und Imaginärteile sind getrennt und es ergeben sich wiederum zwei Gleichungen als Abgleichbedingung:

$$\text{Realteil: } \frac{R_2}{R_X} = \frac{R_4}{R_3} \Rightarrow \boxed{R_X = \frac{R_2 R_3}{R_4}} \quad (8.75)$$

$$\text{Imaginärteil: } R_2 C_X = R_4 C_3 \Rightarrow \boxed{C_X = \frac{C_3 R_4}{R_2}} \quad (8.76)$$

Diese Abgleichbedingungen sind unabhängig von  $U_0$  und  $\omega$ , d.h. wenn hier Ungenauigkeiten vorhanden sind, so wirken sie sich nicht auf die Messgenauigkeit aus. Die unbekannt Bauteile hängen nur von den anderen Bauteilen in der Messbrücke ab.

Bei der **Variante 2** gemäß Abbildung 8.14 wird der verlustbehaftete Kondensator als Reihenschaltung von  $C$  und  $R$  dargestellt.

Für die Abgleichbedingung gilt:

$$\frac{\underline{Z}_X}{R_2} = \frac{\underline{Z}_3}{R_4} \quad (8.77)$$

$$\frac{R_X + \frac{1}{j\omega C_X}}{R_2} = \frac{R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}}{R_4} \quad (8.78)$$

$$\left( R_X + \frac{1}{j\omega C_X} \right) R_4 = \left( R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right) R_2 \quad (8.79)$$

$$\underbrace{R_X R_4}_{\text{Real}} + \underbrace{\frac{R_4}{j\omega C_X}}_{\text{Imag}} = \underbrace{R_3 R_2}_{\text{Real}} + \underbrace{\frac{R_2}{j\omega C_3}}_{\text{Imag}} \quad (8.80)$$

Die komplexe Gleichung wird wieder nach Real- und Imaginärteil getrennt, womit sich für die Abgleichbedingung ergibt:

$$\text{Realteil: } R_X R_4 = R_2 R_3 \Rightarrow \boxed{R_X = \frac{R_2 R_3}{R_4}} \quad (8.81)$$

$$\text{Imaginärteil: } \frac{R_4}{C_X} = \frac{R_2}{C_3} \Rightarrow \boxed{C_X = \frac{C_3 R_4}{R_2}} \quad (8.82)$$

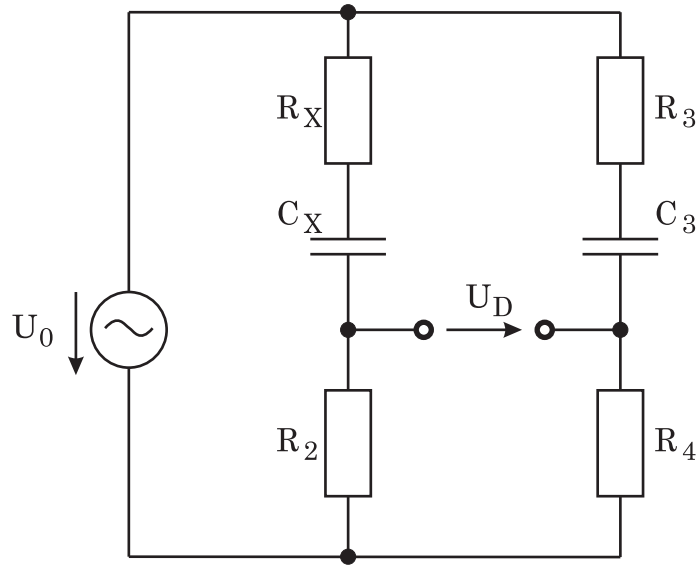


Abbildung 8.14: Wien-Brücke, Variante 2

Dies ist wieder eine einfache Abgleichbedingung ohne Frequenzabhängigkeit.

Es gibt andere Varianten der Wien-Brücke, bei denen in der Abgleichbedingung die Frequenz vorkommt.

### 8.4.1.3 Maxwell-Wien-Brücke

Die Maxwell-Wien-Brücke gemäß Abbildung 8.15 verwendet man zur Messung verlustbehafteter Induktivitäten.

Man verstellt die Widerstände  $R_2$ ,  $R_3$ , und  $R_4$  solange bis die Diagonalspannung  $U_D = 0V$  ist. Die Abgleichbedingung findet man, indem man nach dem üblichen Schema für Wechselspannungsbrücken vorgeht:

$$\frac{\underline{Z}_X}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \quad (8.83)$$

$R_4$  und  $C_4$  bilden eine Parallelschaltung. Aus diesem Grund ist wieder die Verwendung von Admittanzen  $\underline{Y}$  anstelle von Impedanzen  $\underline{Z}$  in (8.83) vorteilhaft:

$$\frac{\underline{Z}_X}{\underline{Z}_2} = \underline{Z}_3 \cdot \underline{Y}_4 \quad (8.84)$$

$$\frac{R_X + j\omega L_X}{R_2} = R_3 \left( \frac{1}{R_4} + j\omega C_4 \right) \quad (8.85)$$

$$\frac{R_X}{R_2} + j\omega \frac{L_X}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} + j\omega R_3 C_4 \quad (8.86)$$

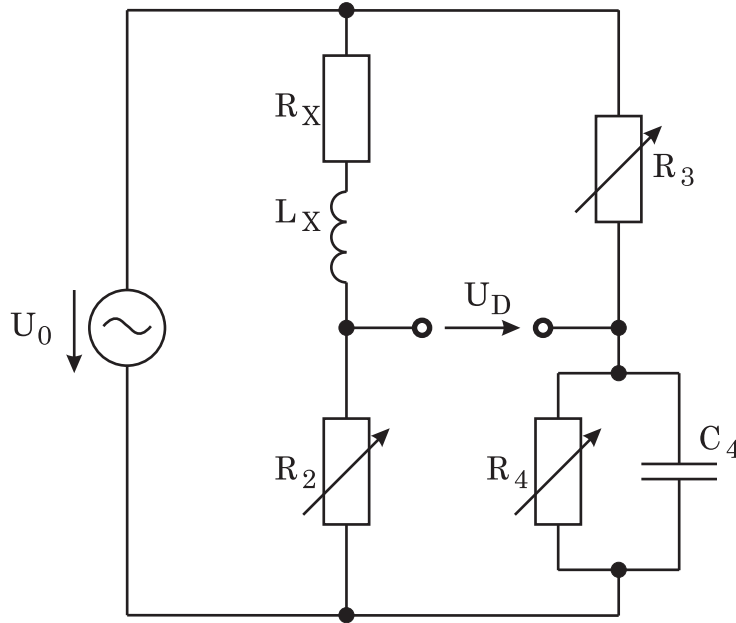


Abbildung 8.15: Maxwell-Wien-Brücke

Nun trennt man die komplexe Gleichung (8.86) nach Real- und Imaginärteil. Für den Realteil erhält man

$$\frac{R_X}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (8.87)$$

und damit für  $R_X$

$$\boxed{R_X = \frac{R_2 R_3}{R_4}}. \quad (8.88)$$

Für den Imaginärteil von (8.86) erhält man entsprechend:

$$j\omega \frac{L_X}{R_2} = j\omega R_3 C_4 \quad (8.89)$$

und damit für  $L_X$

$$\boxed{L_X = R_2 R_3 C_4}. \quad (8.90)$$

Der große Vorteil dieser Brücke ist, dass man  $C_4$  nicht abgleichen muss, um eine Induktivität  $L_X$  zu messen. Es ist viel einfacher und genauer, abgleichbare Widerstände (Potentiometer) zu bauen als abgleichbare hochgenaue Kondensatoren.

Zudem ist die Messung der unbekannt Bauteile weder von der Versorgungsspannung  $U_0$  noch der Frequenz  $\omega$  abhängig, was Fehlermöglichkeiten verringert.

Nicht bei allen komplexen Abgleichmessbrücken kürzt sich die Kreisfrequenz  $\omega$  heraus!



### 8.4.2 Ausschlagmessbrücken

Man kann genauso wie bei den Gleichspannungsmessbrücken in Kapitel 8.3.2 bei Wechselspannungsmessbrücken nach dem Ausschlagverfahren arbeiten. Dazu wird eine Wechselspannungsbrücke nicht abgeglichen, sondern es bleibt eine gewisse Diagonalspannung übrig, die man misst und aus deren Größe man das unbekannte Bauteil berechnet.

Dies aus folgenden Gründen meist nicht vorteilhaft:

- Man benötigt ein Gerät zur genauen Wechselspannungsmessung
- Mit einer Abgleichmessbrücke kann man zwei Komponenten abgleichen (durch Real- und Imaginärteil). Will man das mit einer Ausschlagbrücke durchführen, so muss man zusätzlich die Phasenverschiebung bezogen auf die Versorgungsspannung messen.