

Die Newtonsche Mechanik

1 Einteilchensysteme

1.1 Die Newtonschen Axiome

Die Newtonschen Axiome werden als bekannt vorausgesetzt.

1.2 Konservative Kräfte und Potentiale

Die Kräfte auf ein Teilchen können vom Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ des Teilchens, von seiner Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und von der Zeit t abhängen. Es gibt keine Kräfte, die von der Beschleunigung abhängen. Die Arbeit längs eines infinitesimalen Wegelementes ist

$$dW = \mathbf{F}[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t] \cdot d\mathbf{r} \quad (1.2-1)$$

Die Arbeit längs einer endlichen Kurve C wird durch ‚Summation‘ der infinitesimalen Arbeiten berechnet. So entstehen Linien- oder Kurvenintegrale. Linienintegrale werden meistens durch die Parametrisierung der Raumkurve C berechnet, wobei als Parameter oft die Zeit t verwendet wird. Wenn eine im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ durchlaufene Kurve durch die *Parameterdarstellung* $\mathbf{r}(t)$ beschrieben wird, dann ist $d\mathbf{r} = \mathbf{v}(t) dt$ und das *Linienintegral geht in ein gewöhnliches Integral über*:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t] \cdot \mathbf{v}(t) dt \quad (1.2-2)$$

Beispiel 1.2–1 Linienintegral für zwei verschiedene Wege.

Die Kraft $\mathbf{F} = \left(y, x^2/(2 \text{ m}), x + z \right) \text{ N/m}$ bewegt einen Körper zwischen den beiden Punkten

$$\mathbf{r}_1 = (2 \text{ m}, 0, 0) \quad \mathbf{r}_2 = (2 \text{ m}, 0, 4 \text{ m})$$

- auf einer Geraden parallel zur z -Achse.
- auf einer Schraubenlinie, deren Achse mit der z -Achse zusammenfällt.

Berechne die auf beiden Wegen geleistete Arbeit.

Lösung:

a) Mit dem Einheitsvektor \mathbf{e}_z in z-Richtung gilt: $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_z dz$. Die Arbeit beträgt daher

$$\begin{aligned} W_a &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{4 \text{ m}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z dz = \\ &= \int_0^{4 \text{ m}} (2 \text{ m} + z) \frac{\text{N}}{\text{m}} dz = 16 \text{ N m} \end{aligned}$$

b) Die Schraubenlinie wird durch eine Parameterdarstellung beschrieben:

$$\mathbf{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \\ z(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \text{ m} \cdot \cos \varphi \\ 2 \text{ m} \cdot \sin \varphi \\ 4 \text{ m} \cdot \varphi / (2\pi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W_b &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2 \text{ m} \cdot \sin \varphi \\ 2 \text{ m} \cdot \cos^2 \varphi \\ 2 \text{ m} \cdot \cos \varphi + 2 \text{ m} \cdot \varphi / \pi \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \text{ m} \cdot \sin \varphi \\ 2 \text{ m} \cdot \cos \varphi \\ 2 \text{ m} / \pi \end{pmatrix} d\varphi = \\ &= \left[-4 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right) + 4 \left(\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) + \left(2 \sin \varphi + \frac{\varphi^2}{\pi} \right) \frac{2}{\pi} \right] \Bigg|_0^{2\pi} \text{ N m} = \\ &= (8 - 4\pi) \text{ N m} \end{aligned}$$

Auf beiden Wegen werden verschiedene Arbeiten geleistet: $W_a \neq W_b$. Die vorgegebene Kraft wird weiter unten „nicht konservativ“ genannt werden.

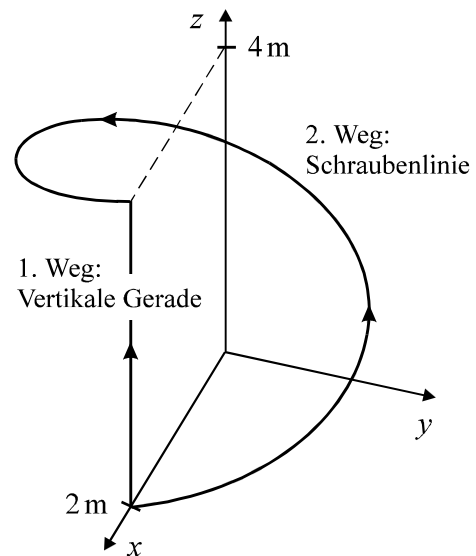


Abb. 1.2–1 Zwei Verschiebungen.

Beispiel 1.2–2 Arbeit der Lorentzkraft

Ein Magnetfeld \mathbf{B} übt auf eine bewegte Ladung q die sog. „Lorentzkraft“ $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ aus. Zeige, dass die Lorentzkraft keine Arbeit verrichtet.

Lösung:

Da die Lorentzkraft senkrecht auf der Geschwindigkeit steht, gilt

$$W = \int_{t_1}^{t_2} q \underbrace{[\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t))] \cdot \mathbf{v}(t)}_{=0} dt = 0$$

Daher können die Geschwindigkeiten elektrisch geladener Teilchen nur mit elektrischen Feldern \mathbf{E} , nicht aber mit Magnetfeldern \mathbf{B} erhöht werden. Magnetfelder können nur die Richtung, nicht aber den Betrag der Geschwindigkeit elektrischer Teilchen ändern.

Wir beschränken uns im Folgenden auf rein ortsabhängige Kräfte $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ und untersuchen die extrem wichtige Frage, für welche Kräfte $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ die Arbeit

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

entlang eines beliebigen Weges C nur vom Anfangspunkt und Endpunkt des Weges abhängt und nicht vom Verlauf der Kurve zwischen den beiden Endpunkten. Kräfte $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ mit dieser Eigenschaft heißen „konservativ“. Von der Vektoranalysis wissen wir:

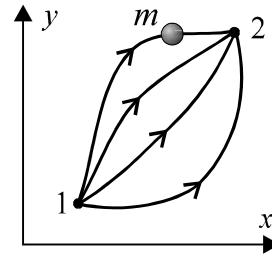


Abb. 1.2–2 Die Arbeit konservativer Kräfte ist für alle Wege gleich groß.

Das Linienintegral $\int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ ist genau dann vom Weg unabhängig, d. h. die nur vom Ort abhängige Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist genau dann konservativ, wenn ein skalares Feld $V(\mathbf{r})$ existiert mit

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\text{grad } V(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3} \right) = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (1.2-3)$$

Das skalare Feld $V(\mathbf{r})$ heißt „Potential“ oder „potentielle Energie“. ¹ Das Minuszeichen in Gl. (1.2–3) ist Konvention und hat keine physikalische Bedeutung. Bei gegebenem Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist $V(\mathbf{r})$ durch Gl. (1.2–3) bis auf eine additive Konstante c eindeutig bestimmt. Für konservative Kräfte lautet die Arbeit

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\left[V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) \right] \quad (1.2-4)$$

Es gibt zwei weitere Bedingungen dafür, dass eine Kraft \mathbf{F} konservativ ist:

1. Eine Kraft ist genau dann konservativ, wenn sie nur vom Ort abhängt $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ und wenn ihr Linienintegral über *jede* geschlossene Kurve Null ergibt:

$$\mathbf{F} \text{ ist konservativ} \iff \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \text{ und } \oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ für jede geschlossene Kurve} \quad (1.2-5)$$

¹ In der Mechanik sind die Begriffe „Potential“ und „potentielle Energie“ bei nahezu allen Autoren gleichbedeutend. In der Elektrodynamik hingegen stehen diese beiden Begriffe für verschiedene Größen:

- Die Potentialdifferenz (oder Spannung) wird definiert als Arbeit der konservativen Coulombkraft pro Ladung

$$\varphi_{12} = U_{12} := \frac{W_{12}}{q} = -\int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad \text{mit der Einheit } \frac{\text{N m}}{\text{C}}$$

Das Potential soll im Unendlichen verschwinden. Dann lautet das Potential im Punkt 1 mit dem Ortsvektor \mathbf{r}

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^1 \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

- Die potentielle Energie einer Ladung q ist das Produkt $q \varphi(\mathbf{r})$ mit der Einheit N m .

2. Eine Kraft ist genau dann konservativ, wenn sie nur vom Ort abhängt $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ und wenn ihre Rotation verschwindet:

$$\mathbf{F} \text{ ist konservativ} \iff \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \text{ und } \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.2-6)$$

Beweis für Aussage 1: Für den geschlossenen Weg in Abb.

1.2-3 gilt:

$$\oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{1, C_1}^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{2, -C_2}^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

Für alle Wege C_1, C_2 ist das Integral über den geschlossenen Weg $C_1 + (-C_2)$ genau dann null, wenn

$$\int_{1, C_1}^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{2, -C_2}^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{1, C_2}^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

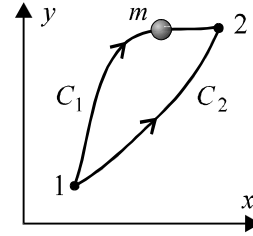


Abb. 1.2-3 Die Arbeit ist auf beiden Wegen gleich \iff Sie verschwindet auf dem geschlossenen Weg $C_1 + (-C_2)$.

Beweis für Aussage 2: Aus $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ folgt:

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Vertauschbarkeit der} \\ \text{partiellen Ableitungen}}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ist umgekehrt $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$, so gilt nach dem Stokesschen Satz für die geschlossene Kurve C , die eine Fläche A umschließt:

$$0 = \iint_A \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \blacklozenge$$

Beispiel 1.2-3 Arbeit einer konservativen Kraft.

- a) Erkläre den Unterschied zwischen den Kräften $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \mathbf{r}$ und $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r}$.
- b) Zeige: Die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r}$ ist konservativ.
- c) Berechne das Potential für $f(r) = -\alpha r^2$. Im Koordinatenursprung soll das Potential null sein.

Lösung:

- a) Beide Kräfte haben radiale Richtung und heißen „Zentralkräfte“. Die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r}$ ist darüber hinaus noch rotationssymmetrisch, d. h. der Kraftbetrag hängt nicht von der Richtung ab.

$$\mathbf{b) } \nabla \times [f(r) \mathbf{r}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x f(r) \\ y f(r) \\ z f(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial [z f(r)]}{\partial y} - \frac{\partial [y f(r)]}{\partial z} \\ \frac{\partial [x f(r)]}{\partial z} - \frac{\partial [z f(r)]}{\partial x} \\ \frac{\partial [y f(r)]}{\partial x} - \frac{\partial [x f(r)]}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z \frac{\partial f(r)}{\partial y} - y \frac{\partial f(r)}{\partial z} \\ x \frac{\partial f(r)}{\partial z} - z \frac{\partial f(r)}{\partial x} \\ y \frac{\partial f(r)}{\partial x} - x \frac{\partial f(r)}{\partial y} \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \begin{pmatrix} z \frac{\partial r}{\partial y} - y \frac{\partial r}{\partial z} \\ x \frac{\partial r}{\partial z} - z \frac{\partial r}{\partial x} \\ y \frac{\partial r}{\partial x} - x \frac{\partial r}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \quad \text{usw.}$$

Bemerkung: Die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r}$ hingegen ist nicht konservativ, hat also kein Potential.

c) Das Potential $V(\mathbf{r})$ in einem Punkt P mit dem Ortsvektor \mathbf{r} ist in diesem Fall das Linienintegral der Kraft vom Koordinatenursprung zum Punkt P. Da das Linienintegral einer konservativen Kraft wegunabhängig ist, können wir den für die Integration günstigsten Weg wählen. Der günstigste Weg verläuft hier geradlinig, radial nach außen.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{0}) = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{r}} \nabla V(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \\ &= \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{r}} \alpha r'^2 \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}' \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Auf dem Integrationsweg} \\ \text{ist } \mathbf{r}' \text{ parallel zu } d\mathbf{r}'}}{=} \int_0^r \alpha r'^3 dr' = \frac{\alpha}{4} r^4 \end{aligned}$$

Beispiel 1.2–4 Schwerkraft

Zeige, dass die Schwerkraft $m \mathbf{g}$ eine konservative Kraft ist.

Lösung:

Wir zeigen, dass die Hubarbeit im homogenen Schwerfeld nicht vom Weg abhängt.

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{t_1}^{t_2} m \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} dt = m g \int_{t_1}^{t_2} \dot{z}(t) dt = \\ &= m g [z(t_2) - z(t_1)] = m g h \end{aligned}$$

Beispiel 1.2–5 Gleitreibungskraft

Zeige, dass die Gleitreibungskraft $\mathbf{F}_R = -\mu N \frac{\mathbf{v}}{v}$ nicht konservativ ist.

Lösung:

Wir zeigen, dass die Reibarbeit vom Weg abhängt.

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v} dt = -\mu N \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathbf{v}}{v} \cdot \mathbf{v} dt = -\mu N \int_{t_1}^{t_2} v dt = -\mu N s$$

Die Arbeit der Gleitreibungskraft ist proportional zur Länge s des Weges, der zurückgelegt wurde.

Auch zeitabhängige Kräfte können ein Potential haben: $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V(\mathbf{r}, t)$. Zeitabhängige Kräfte sind aber nicht konservativ. Denn laut Definition sind Kräfte genau dann konservativ, wenn sie *nur* vom Ort abhängen (also nicht von der Zeit) *und* wenn sie ein Potential haben. Außerdem sind zeitabhängige Kräfte $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ auch deshalb nicht konservativ, weil ihre Arbeit über einen geschlossenen Weg ungleich null sein kann – z. B. bei der Bewegung einer Ladung in einem Kondensator mit veränderlicher Spannung.

Federkräfte, Gravitationskräfte und Coulombkräfte sind konservative Kräfte. Reibungskräfte hingegen sind nicht konservativ, da die Reibungsarbeit zwischen zwei Punkten umso größer ist, je länger der gewählte Weg C ist.

1.3 Drehmoment und Drehimpuls

Die Gesetze der Mechanik sollen so formuliert werden, dass sich Drehbewegungen optimal beschreiben lassen. Drehbewegungen liegen z. B. dann vor, wenn Massenpunkte auf Kreisbahnen laufen. Die neuen Größen Drehmoment \mathbf{M} und Drehimpuls \mathbf{L} sind Kreisbahnen am besten angepasst und übernehmen die Rolle der Kraft \mathbf{F} und des Impulses \mathbf{p} .

Zuerst wollen wir überlegen, welche Größe bei Drehbewegungen die Rolle der Kraft übernimmt. Zu diesem Zweck betrachten wir vorerst noch keine einzelnen Massenpunkte, sondern eine Stange, die sich reibungsfrei in der x, y -Ebene um den Koordinatenursprung 0 drehen kann. Eine Kraft \mathbf{F} greift an der Stange im Abstand r vom Koordinatenursprung unter dem Winkel φ an. Nur die Kraftkomponente $F_{\perp} = F \sin \varphi$ senkrecht zur Stange beeinflusst die Drehung. (Die Kraftkomponente in Richtung der Stange belastet nur das Lager in 0 .) Nach dem Hebelgesetz ist die drehende Wirkung der Kraft proportional zu

$$F_{\perp} r = F \sin \varphi r = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| \quad (1.3-1)$$

mit \mathbf{r} = Ortsvektor des Angriffspunktes der Kraft \mathbf{F} .

Wir definieren nun das

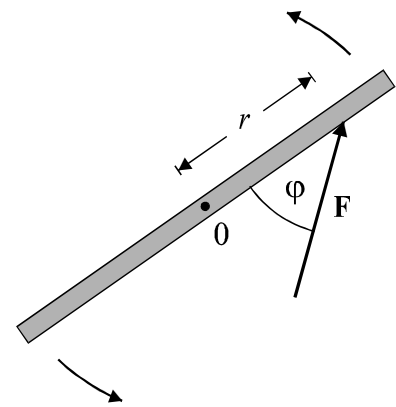


Abb. 1.3-1 Die Kraft \mathbf{F} beeinflusst die Drehung. Ihre Wirkung ist proportional zu F , r und zu $\sin \varphi$.

Drehmoment \mathbf{M} einer Kraft \mathbf{F} , deren Angriffspunkt den Ortsvektor \mathbf{r} hat:

$$\mathbf{M} := \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (1.3-2)$$

\mathbf{M} ist das Vektorprodukt aus dem Ortsvektor \mathbf{r} , der vom Koordinatenursprung 0 zum Angriffspunkt der Kraft zeigt, und der Kraft \mathbf{F} . Das Drehmoment \mathbf{M} steht daher senkrecht auf \mathbf{r} und senkrecht auf \mathbf{F} .

Der Koordinatenursprung muss *nicht* unbedingt – wie bei den vorangehenden Betrachtungen angenommen – im Drehpunkt liegen. Da der Koordinatenursprung 0 beliebig gewählt werden kann, ist das Drehmoment nicht eindeutig definiert. *Bei verschiedenen Koordinatenursprüngen ergeben sich verschiedene Ortsvektoren \mathbf{r} und damit auch verschiedene Drehmomente \mathbf{M} .* Auch der weiter unten definierte Drehimpuls \mathbf{L} hängt von der Wahl des Koordinatenursprungs ab. Die Abhängigkeit des Drehmoments und des Drehimpulses vom Ort des Koordinatenursprungs ist einer der Gründe dafür, warum Drehmoment und vor allem Drehimpuls etwas unanschauliche Größen sind.

Hingegen hängen die Bewegungsgl. für Drehbewegungen (1.3-4), Unwuchtkräfte, Rotationsenergien, Brems- und Antriebsleistungen rotierender Maschinenelemente, *nicht* von der Wahl des Koordinatenursprungs ab.

In aller Regel ist es *am günstigsten, den Koordinatenursprung in den Drehpunkt oder auf die Drehachse zu legen.*

Arbeit und Drehmoment haben dieselbe Einheit N m . Trotzdem sind Arbeit und Drehmoment verschiedene Größen. Das geht schon daraus hervor, dass die Arbeit ein Skalar und das Drehmoment ein Vektor ist. Der Unterschied lässt sich auch durch die Einheiten verdeutlichen: Die Arbeit erhält oft die Einheit Joule, seltener die (identische) Einheit N m ; dem Drehmoment gibt man nur die Einheit N m , niemals aber die Einheit Joule.

Als zweite zentrale physikalische Größe für die Drehbewegungen definieren wir den

Drehimpuls eines Teilchens, das den Ortsvektor \mathbf{r} und den Impuls \mathbf{p} hat:

$$\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1.3-3)$$

Der Drehimpuls hat die Einheit $[\text{N m s}]$ und steht senkrecht auf dem Ortsvektor \mathbf{r} des Teilchens und dem Impuls \mathbf{p} des Teilchens. *Bei einer Kreisbahn ist der Drehimpuls \mathbf{L} nur dann parallel zur Drehachse, wenn der Koordinatenursprung und damit auch der Ortsvektor \mathbf{r} in der durch die Kreisbahn aufgespannten Ebene liegen.* Für die meisten Rechnungen ist es *am günstigsten* – aber nicht zwingend –, *den Koordinatenursprung in den Drehpunkt oder auf die Drehachse zu legen* – falls vorhanden.

Wir müssen nun eine Bewegungsgl. für Drehbewegungen aufstellen, die dem zweiten Newtonschen Axiom $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ entspricht. Da der Drehimpuls \mathbf{L} bei Drehungen vermutlich die Rolle des Impulses \mathbf{p} übernimmt, ist die Berechnung der Zeitableitung von \mathbf{L} nahe liegend. Mit der Produktregel der Differentialrechnung finden wir

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \times (m \mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Der erste Term $\mathbf{v} \times (m \mathbf{v})$ verschwindet, da das Vektorprodukt von zwei parallelen Vektoren null ist. Dann folgt sofort die Bewegungsgl. für Drehbewegungen (im Maschinenbau „Drallsatz“ genannt):

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} \quad (1.3-4)$$

Die Zeitableitung des Drehimpulses \mathbf{L} eines Massenpunktes, auf den eine Kraft \mathbf{F} wirkt, ist gleich dem Drehmoment \mathbf{M} dieser Kraft. Dabei müssen $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ und $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ denselben Ortsvektor \mathbf{r} enthalten, d. h. \mathbf{L} und \mathbf{M} müssen sich auf denselben (beliebig wählbaren) Koordinatenursprung beziehen. Bei einer Verschiebung des Koordinatenursprungs ändern sich \mathbf{r} und damit auch die Vektoren \mathbf{L} und \mathbf{M} , aber die Gl. (1.3-4) bleibt unverändert gültig und nur darauf kommt es an (siehe das folgende Beispiel 1.3-1).

Beispiel 1.3-1 Freier Fall und Drehgrößen.

Die Masse m fällt reibungsfrei im homogenen Schwerkraftfeld senkrecht nach unten. Die Anfangsbedingungen lauten

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obwohl diese Aufgabe keine Drehung enthält und daher sicherlich nicht auf den Drehimpuls und das Drehmoment zugeschnitten ist, muss die Gl. $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$ trotzdem gelten. Das ist zu zeigen.

Lösung:

Ortsvektor, Impuls und Kraft lauten:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 - g t^2/2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}(t) = m \mathbf{v}(t) = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g t \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m g \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 - g t^2/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m g t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m y_0 g t \\ m x_0 g t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \mathbf{M}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 - g t^2/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m y_0 g \\ m x_0 g \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$$

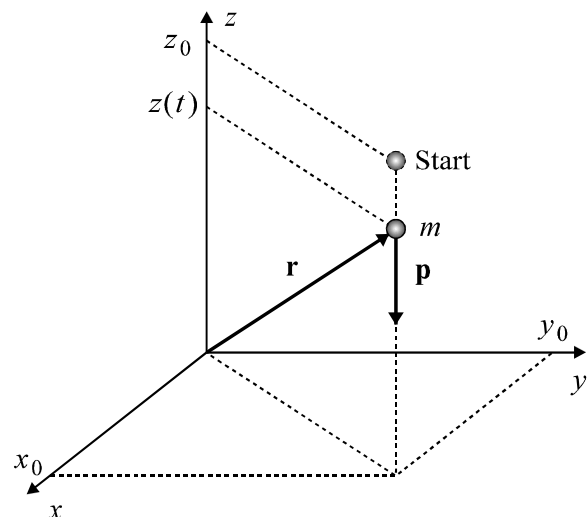


Abb. 1.3-2 Freier Fall in negative z-Richtung

Offensichtlich entspricht Gl. (1.3–4) dem zweiten Newtonschen Axiom:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} \quad \leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

Folglich spielen bei Drehungen der Drehimpuls und das Drehmoment die gleiche Rolle wie Impuls und Kraft bei Translationen. Mit den Analogien

$$\mathbf{L} \leftrightarrow \mathbf{p} \quad \text{und} \quad \mathbf{M} \leftrightarrow \mathbf{F}$$

und mit dem zweiten Newtonschen Axiom $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ kann man die Gl. (1.3–4) jederzeit leicht “herleiten”. Deshalb muss man die Gl. (1.3–4) nicht behalten, wenn man nur die Analogien und ihre Bedeutung kennt.

Aus der Bewegungsgl. (1.3–4) folgt sofort der

Drehimpulssatz für einen Massenpunkt: Der Drehimpuls \mathbf{L} eines Massenpunktes ist konstant,

- wenn keine Kraft wirkt ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$) oder
- wenn die Kraft immer parallel zum Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ ist ($\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$).

In beiden Fällen ist das Drehmoment gleich null.

Wir verdeutlichen den Satz durch genauere Untersuchung der beiden Fälle $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$:

1) $\mathbf{F} = \mathbf{0}$: Das kräftefreie Teilchen bewegt sich geradlinig gleichförmig mit konstantem Impuls \mathbf{p} . Der Drehimpuls ist konstant, da er eine konstante Richtung hat – in Abb. 1.3–3 zeigt er senkrecht in das Blatt hinein – und da sein Betrag $r_{\perp} m v$ ebenfalls konstant ist.

Bemerkung: Wir sehen, dass es auch bei geradlinigen Bewegungen einen Drehimpuls gibt. Der Drehimpuls ist um so größer, je weiter der Koordinatenursprung von der gestrichelten Teilchenbahn entfernt ist. Der Drehimpuls hängt also auch hier von der Wahl des Koordinatenursprungs ab, ist aber bei jeder Wahl zeitlich konstant. Das Drehmoment ist bei jeder Wahl des Koordinatenursprungs null. Gl. (1.3–4) ist immer – unabhängig von der Wahl des Ursprungs – erfüllt.

2) $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$: In diesem Fall zeigt die Kraft immer zum Koordinatenursprung hin oder vom Koordinatenursprung weg. Man spricht von einer “Zentralkraft”.

Als Beispiel betrachten wir ein Teilchen, das durch einen Faden der konstanten Länge r gehalten wird und reibungsfrei auf einer horizontalen Tischplatte umläuft. Wenn der Koordinatenursprung im Mittelpunkt der Kreisbahn liegt, dann ist die Kraft des Fadens auf das Teilchen eine Zentralkraft der Größe $-m \omega^2 \mathbf{r}$. Das Drehmoment dieser Fadenkraft ist null. In Abb. 1.3–4 zeigt der Drehimpuls senkrecht aus dem Blatt heraus und hat den konstanten Betrag

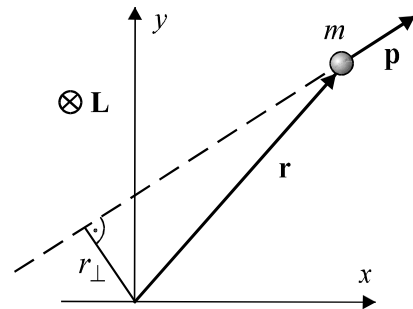


Abb. 1.3–3 Bei einer geradlinig gleichförmigen Bewegung ist der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ konstant und das Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ verschwindet wegen $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

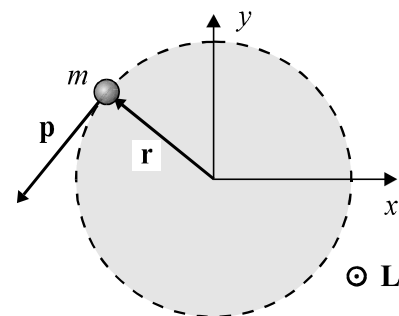


Abb. 1.3–4 Die Masse m läuft – durch einen Faden gehalten – auf einer Kreisbahn.

$$L = m r v$$

Die Anziehungskraft der Sonne auf die Planeten ist eine Zentralkraft, wenn der Koordinatenursprung im Mittelpunkt der Sonne liegt.

Beispiel 1.3–2 Kreisbahnen mit verschiedenen Radien.

Auf einer horizontalen Tischplatte kann ein Teilchen mit Masse m reibungsfrei gleiten. Durch ein in die Tischplatte gebohrtes, dünnes Loch wird ein Faden geführt und mit dem Teilchen verbunden. Unter der Tischplatte hält eine Hand den Faden fest, so dass das Teilchen auf einer Kreisbahn mit Radius r_1 , Bahngeschwindigkeit v_1 und Winkelgeschwindigkeit ω_1 umläuft.

Wie groß sind Bahn- und Winkelgeschwindigkeit v_2, ω_2 , nachdem man durch Absenken der Hand den Radius der Kreisbahn auf r_2 verringert hat?

Lösung:

Der Energiesatz liefert eine *qualitative* Aussage: Beim Absenken der Hand ist eine Kraft gegen die Fadenspannung aufzubringen. Folglich leistet die Hand eine Arbeit, die die Energie der Masse vergrößert. Daher ist v_2 größer als v_1 . Die Energiezunahme ist gleich dem Wegintegral der Fadenspannung von r_1 nach r_2 . Das Integral kann aber nur berechnet werden, wenn die Zunahme der Geschwindigkeit und damit auch die Zunahme der Zentralkraft genau bekannt sind. Die Zunahme der Geschwindigkeit wird aber erst unten mit dem Drehimpulssatz berechnet.

Mit dem Drehimpulssatz ist eine quantitative Lösung einfach. Auf die Masse wirkt in der horizontalen Ebene nur die Fadenspannung, die eine Zentralkraft ist und daher den Drehimpuls nicht ändert:

$$L_1 = m r_1 v_1 = L_2 = m r_2 v_2$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{v_2}{r_2} = \frac{r_1}{r_2^2} v_1 \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ v_1 = r_1 \omega_1}}{=} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \omega_1$$

Die Winkelgeschwindigkeit nimmt stärker zu als die Bahngeschwindigkeit.

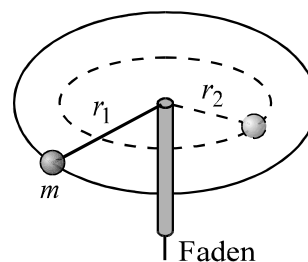


Abb. 1.3–5 Durch Ziehen am unteren Ende des Fadens wird der Radius der Kreisbahn verringert.

1.4 Aufgaben

1-1 Leicht Gradient, Divergenz und Rotation

a) Der Gradient eines skalaren Feldes $f(r)$ ist laut Definition ein Vektorfeld:

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \text{grad } f(\mathbf{r}) := (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z) \quad (1.4-1)$$

Zeige: $\nabla r = \text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ (1.4-2)

b) Die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ ist laut Definition ein skalares Feld:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \text{div } \mathbf{f}(\mathbf{r}) := \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \quad \text{mit } f_i = i\text{-te Komponente von } \mathbf{f} \quad (1.4-3)$$

Zeige: $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$. (1.4-4)

c) Die Rotation eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ ist laut Definition ein Vektorfeld:

$$\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{f}(\mathbf{r}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{r}) \\ f_2(\mathbf{r}) \\ f_3(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3(\mathbf{r})}{\partial y} - \frac{\partial f_2(\mathbf{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{r})}{\partial z} - \frac{\partial f_3(\mathbf{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\partial f_1(\mathbf{r})}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.4-5)$$

Zeige: $\nabla \times \mathbf{r} = \text{rot } \mathbf{r} = \mathbf{0}$ (1.4-6)

1-2 Mittel Potential der Gravitationskraft

Die Gravitationskraft eines Massenpunktes m_1 im Koordinatenursprung auf einen zweiten Massenpunkt mit Ortsvektor \mathbf{r} beträgt

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.4-7)$$

a) Zeige, dass die Kraft konservativ ist.

b) Berechne das Potential der Gravitationskraft. Das Potential soll im Unendlichen verschwinden.

1-3 Mittel Drehimpuls in Polarkoordinaten

Ein Teilchen mit der Masse m bewegt sich auf einer *beliebigen* Bahn in der x,y-Ebene. Zeige, dass der Drehimpulsvektor in Polarkoordinaten r, φ folgendes Aussehen hat:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m r^2 \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$