2 Kinematik

Aufgabe 2-1

Ein **dünnes** Holzbrett mit Masse $m = 9\,\text{kg}$, Höhe $h = 2$ m und Breite $b = 1{,}2$ m ist an eine vertikale Achse **angeklebt**, die mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Der gleichmäßig über die Höhe h verteilte Kleber kann insgesamt eine Zugkraft von 2,5 kN aufnehmen.

Welche Drehzahl n_{max} mit der Einheit **[Umdrehungen pro <u>Minute</u>]** ist maximal zulässig, wenn der Kleber halten soll?

Hinweis: Gewichtskräfte und Reibungskräfte in der Luft sollen **nicht** beachtet werden.

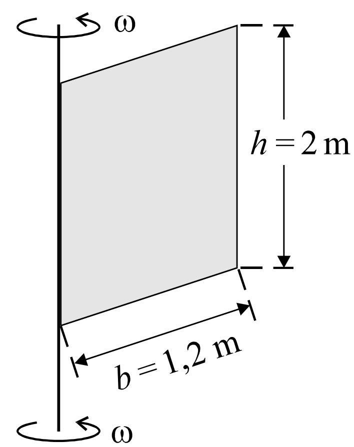

Abb. 2-1 Das <u>dünne</u> Brett ist an eine rotierende vertikale Achse angeklebt.

Lösung:

Physikalische Erklärung: Die Fliehkraft belastet den Kleber auf Zug.

Eine Masse m, die auf einer Kreisbahn mit Radius r und Winkelgeschwindigkeit ω umläuft, erfährt die Fliehkraft

$$F_{\text{Flieh}} = m\,\omega^2\,r$$

Da die verschiedenen Massenelemente des Brettes auf Kreisbahnen mit verschiedenen Radien r umlaufen, kann die genannte Gl. nicht direkt angesetzt werden. Wir müssen zuerst infinitesimale Teile des Brettes betrachten.

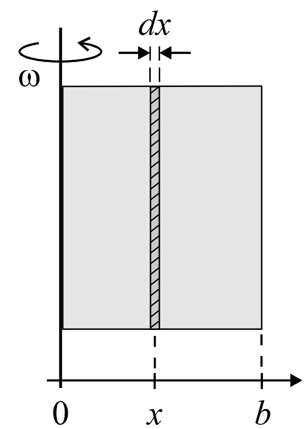

Abb. 2-2 Zuerst wird die infinitesimale Fliehkraft auf den markierten Streifen berechnet.

Auf den schraffierten Streifen wirkt die Fliehkraft

$$d F_{\text{Flieh}} = dm\,\omega^2\,x = \frac{m}{b}\,dx\,\omega^2\,x$$

$$\Rightarrow \qquad F_{\text{Flieh}} = \frac{m\,\omega^2}{b}\int_0^b x\,dx = \frac{m\,\omega^2}{2}\,b =$$

$$= 5{,}4 \cdot \text{kg m} \cdot \omega^2 \le 2{,}5\ \text{kN}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega \le \sqrt{\frac{2500}{5{,}4}\,\frac{1}{\text{s}}} \approx 21{,}517\,\frac{1}{\text{s}} \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{60\cdot\omega}{2\,\pi} \approx 205{,}468\,\frac{\text{U}}{\text{min}}$$

Aufgabe 2-3

Auf einer Stange, die mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω in der horizontalen Ebene rotiert, können zwei Kugeln mit Massen m_1, m_2 reibungsfrei gleiten. Sie werden durch einen Faden der Länge l zusammengehalten.

Wie groß sind die Radien r_1, r_2 der Kreisbahnen, wenn sich die beiden Kugeln bei allen Winkelgeschwindigkeiten nicht in radiale Richtung verschieben sollen?

Lösung:

Wir benötigen 2 Gln. für die 2 Unbekannten r_1, r_2.

$$r_1 + r_2 = l$$

$$m_1 r_1 \omega^2 = m_2 r_2 \omega^2$$

$\Rightarrow$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l$$

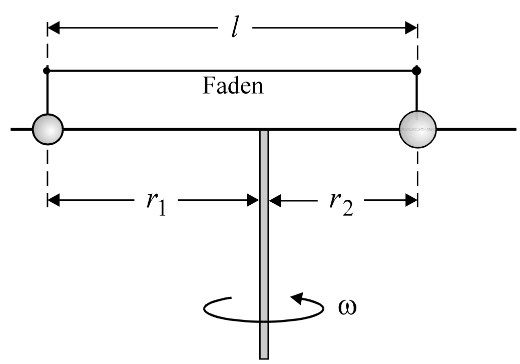

Abb. 2–4 Die beiden Kugeln können reibungsfrei auf der rotierenden Stange gleiten, werden aber durch den Faden der Länge l zusammengehalten. Die Kugeln sollen auf Kreisbahnen laufen.

3 Kräfte

Aufgabe 3.1-1

Die beiden identischen Federn mit Federkonstante D sind jeweils unten drehbar an einer Wand befestigt und tragen oben einen ruhenden Körper mit Masse m. Die Schwerkraft wirkt in die negative x-Richtung.

Um welche Strecke s ist jede Feder in der dargestellten **Ruhelage** der Masse m zusammengedrückt?

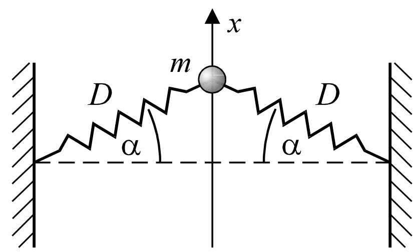

Abb. 3.1-1 Die Masse m ruht in einer Gleichgewichtslage.

Gegeben: m, D, α Gesucht: s

Lösung:

Physikalische Erklärung: Die zusammengedrückten Federn üben jeweils in Längsrichtung eine Kraft auf die Masse m aus. Die vertikalen Komponenten dieser zwei Kräfte tragen die Masse m. Das bedeutet:

$$m\,g \;=\; 2\,D\,s\,\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \qquad s \;=\; \frac{m\,g}{2\,D\,\sin\alpha}$$

Aufgabe 3.1-2

Eine konstante Kraft **F** zieht drei Körper mit den Massen m_1, m_2, m_3 beschleunigt einen schrägen Hang hinauf. Die Körper sind mit zwei Seilen miteinander verbunden. Der erste Körper mit der Masse m_1 rutscht mit der Gleitreibungszahl $\mu > 0$ über den Hang, die beiden restlichen Massen sind unten vereist und gleiten daher reibungsfrei.

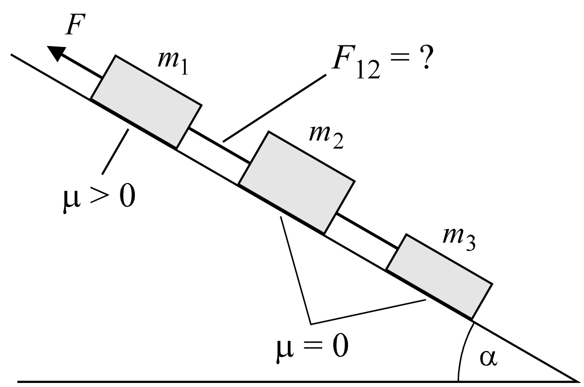

Abb. 3.1-2 Drei Körper werden von einer konstanten Kraft hinauf gezogen. Der 2. und der 3. Körper gleiten reibungsfrei.

a) Wie groß sind die gesamte Hangabtriebskraft F_{ab} und die Gleitreibungskraft F_R ?

b) Wie groß ist die Seilkraft F_{12} zwischen der 1. und 2. Masse?

Gegeben: $F = \text{const}, m_1, m_2, m_3, \mu > 0, \alpha$

Lösung:

a) Mit $m_{ges} := m_1 + m_2 + m_3$ finden wir:

$$F_{ab} = m_{ges}\, g \sin\alpha \qquad\qquad F_R = \mu\, m_1\, g \cos\alpha$$

b) $$m_{ges}\, a = F - F_{ab} - F_R = F - m_{ges}\, g \sin\alpha - \mu\, m_1\, g \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{F}{m_{ges}} - g \sin\alpha - \mu \frac{m_1}{m_{ges}}\, g \cos\alpha$$

Für die gesuchte Kraft F_{12} gilt:

$$(m_2 + m_3)\, a = F_{12} - (m_2 + m_3)\, g \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \qquad F_{12} = (m_2 + m_3)(a + g \sin\alpha) =$$

$$= (m_2 + m_3)\left(\frac{F}{m_{ges}} - g \sin\alpha - \mu \frac{m_1}{m_{ges}}\, g \cos\alpha + g \sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\left(F - \mu\, m_1\, g \cos\alpha\right)$$

Aufgabe 3.1–3 Gesuchte Kraft

Wie groß muss die horizontale Kraft *F* sein, damit sich die Massen m_2 und m_3 **relativ** zur großen Masse m_1 **nicht** bewegen? Die vier Räder der kleinen Massen m_2 und m_3 sollen sich also nicht drehen, wenn das ganze System nach rechts beschleunigt wird.

Hinweise: **1)** Überlege zuerst, welche Kraft die Masse m_2 nach rechts beschleunigt.

2) Die Massen aller Räder, der Umlenkrolle und des Seiles sind vernachlässigbar klein.

3) Die Lösung ist nur 2 oder 3 Zeilen lang.

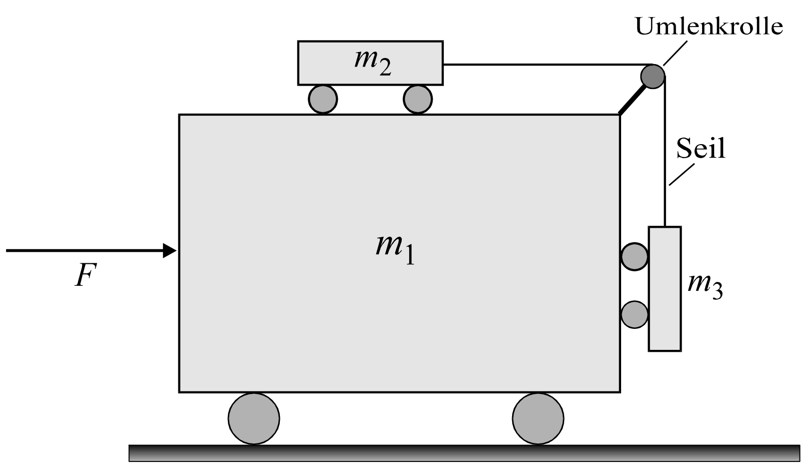

Abb. 3.1–3 Die Räder der kleinen Massen m_2, m_3 dürfen nicht rollen.

Lösung:

Alle drei Massen sollen durch die Kraft F gleich stark beschleunigt werden. Daraus folgt

$$F = \left(m_1 + m_2 + m_3 \right) a$$

Die Gewichtskraft $m_3\, g$ der dritten Masse muss die Masse m_2 beschleunigen, so dass

$$m_3\, g = m_2\, a$$

Einsetzen der zweiten Gl. in die erste Gl. liefert sofort

$$F = \frac{m_3}{m_2} \left(m_1 + m_2 + m_3 \right) g$$

Aufgabe 3.1–4 Beschleunigte Platte

Eine dünne Platte mit der Masse m wird durch eine Kraft F, die am Schwerpunkt S der Platte angreift und den Winkel α mit der Horizontalen bildet, reibungsfrei in horizontaler Richtung beschleunigt.

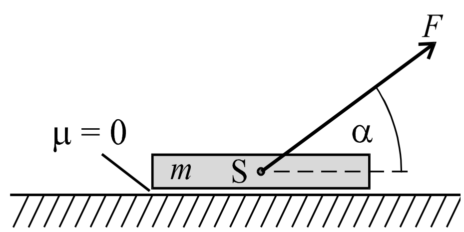

Abb. 3.1–4 Zwischen der gezogenenen Platte und dem Boden besteht keine Reibung.

a) Wie groß ist die Beschleunigung a der Platte?

b) Jetzt werden die Kraft F und damit auch die Beschleunigung a langsam gesteigert. (Der Winkel α wird nicht verändert.) Wie lautet die maximale Kraft F_{max}, bei der die Platte gerade noch auf dem Boden bleibt? Wie groß ist die Beschleunigung a_{max}, wenn die maximale Kraft anliegt?

Lösung:

a) $$a = \frac{F \cos \alpha}{m} \tag{1}$$

b) Die vertikale Komponente der maximalen Kraft F_{max} ist im Grenzfall gleich der Gewichtskraft:

$$F_{max} \sin \alpha = m\, g \quad \Rightarrow \quad F_{max} = \frac{m\, g}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \quad a_{max} \underset{\text{Gl. 1}}{\overset{}{=}} \frac{F_{max} \cos \alpha}{m} = g \cot \alpha$$

4.2 Leistung

Aufgabe 4.2-1

Ein Auto mit **Allradantrieb** und mit der Masse $m = 2000\ \text{kg}$ hat einen $300\ \text{kW}$ starken Motor. Die Haftreibungszahl der Räder auf dem Boden ist 0,95. Bei kleinen Geschwindigkeiten kann das Auto nicht mit voller Motorleistung beschleunigen, da sonst die Räder durchdrehen würden.

Ab welcher Geschwindigkeit v_{min} kann der Wagen mit voller Motorleistung beschleunigen ohne Durchdrehen der Räder?

Hinweise: Mechanische Energieverluste durch die Luftreibung und die Verformungen der Räder sollen vernachlässigt werden. Die Lösung ist **kurz**.

Lösung:

$$P = m\, a\, v_{\text{min}} = m\, \mu_0\, g\, v_{\text{min}}$$

Daraus folgt:

$$v_{\text{min}} = \frac{3 \cdot 10^5\ \text{W}}{2000\ \text{kg} \cdot 0{,}95 \cdot 9{,}81\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 16{,}095\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 57{,}94\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Aufgabe 4.2–2

Ein Auto mit der Masse $m = 1400\ \text{kg}$ fährt mit der Geschwindigkeit $v_0 = 36\ \text{km/h}$. Jetzt wird das Auto mit der konstanten Leistung $P = 150\ \text{kW}$ bis zur Endgeschwindigkeit $v_{\text{E}} = 108\ \text{km/h}$ beschleunigt.

a) Wie groß ist die Beschleunigungszeit t_{B}?

b) Welche Strecke s_{B} wird bei der Beschleunigung zurückgelegt?

Hinweis: Reibungsverluste werden vernachlässigt.

Lösung:

a) $$m\, v\, \dot{v} = P \qquad \Leftrightarrow \qquad v\,\frac{dv}{dt} = \frac{P}{m}$$

Separation der Variablen führt auf

$$v\, dv = \frac{P}{m}\, dt$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{v_0}^{v} v'\, dv' = \frac{P}{m} \int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{P}{m}\,t$$

$$\Rightarrow \qquad v(t) = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\,P}{m}\,t}$$

$$\Rightarrow \qquad t_\mathrm{B} = \frac{m}{2\,P}\left(v_\mathrm{E}^2 - v_0^2\right) = 3,7\overline{3}\ \mathrm{s}$$

b) $$s_\mathrm{B} = \int_0^{t_\mathrm{B}} v(t)\,dt = \int_0^{t_\mathrm{B}} \sqrt{v_0^2 + \frac{2\,P}{m}\,t}\;dt$$

Mit der Substitution $u := v_0^2 + \frac{2\,P}{m}\,t$ finden wir

$$s_\mathrm{B} = \frac{m}{3\,P}\left(v_0^2 + \frac{2\,P}{m}\,t\right)^{3/2}\Bigg|_0^{t_\mathrm{B}} = \frac{m}{3\,P}\left[\left(v_0^2 + \frac{2\,P}{m}\,t_\mathrm{B}\right)^{3/2} - v_0^3\right] \approx$$

$$\approx 80,89\ \mathrm{m}$$

4.3 Energie

Aufgabe 4.3-1

Eine Kugel mit der Masse m ist an einer massenlosen Pendelstange der Länge $2\,l$ und an einer masselosen Feder mit Federkonstante D befestigt (siehe die Abb. 2). Die ungedehnte Feder hat die Länge l. Die Pendelstange ist am unteren Ende und die Feder am oberen Ende **drehbar** gelagert.

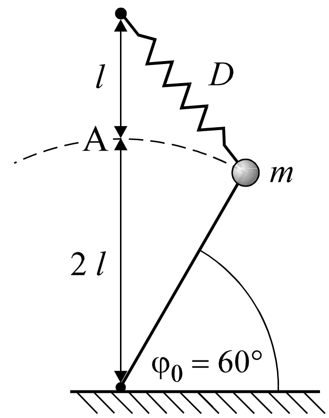

Abb. 4.3-1 Die Kugel wird bei **gespannter Feder** losgelassen.

Die Masse m wird mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi_0 = 60° \qquad \dot{\varphi}_0 = 0$$

losgelassen und bewegt sich dann auf einem vertikalen Kreisbogen über den höchsten Punkt A hinaus. Im höchsten Punkt A ist die Feder entspannt.

Wie groß ist die Geschwindigkeit v_A im Punkt A?

Gegeben: $m\,,D\,,l$ Gesucht: v_A

Lösung:

Zu Beginn beträgt die Länge der Feder

$$l_0 = \sqrt{\left(2\,l\sin 30°\right)^2 + \left(3\,l - 2\,l\cos 30°\right)^2} =$$

$$= l\,\sqrt{1 + \left(3 - \sqrt{3}\right)^2} = l\,\sqrt{13 - 6\,\sqrt{3}} \approx 2,7935\cdot l$$

Der Energiesatz der Mechanik liefert:

$$\frac{D}{2}\left(l - l_0\right)^2 = m\,g\,2\,l\,(1 - \cos 30°) + \frac{m}{2}\,v_A^2$$

$$\Rightarrow \qquad v_A = \sqrt{\frac{D}{m}\left(l_0 - l\right)^2 - 4\,l\,g\,\left(1 - \cos 30°\right)}$$

Aufgabe 4.3-2

Ein **dünner** Ring mit Masse m und Radius R rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse, die durch den Mittelpunkt des Ringes läuft und in der vom Ring aufgespannten Ebene liegt.

Berechne die kinetische Energie des rotierenden Ringes.

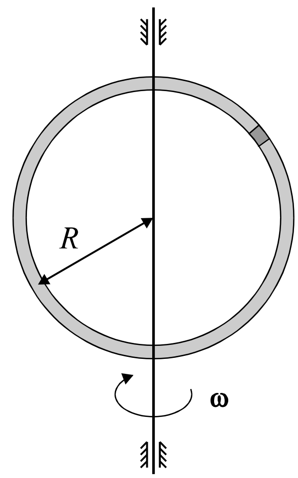

Abb. 4.3-2 Der **dünne** Ring rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω.

Lösung:

Das in Abb. 5 dunkel markierte Volumenelement hat die Masse

$$dm = m\,\frac{d\varphi}{2\,\pi}$$

und die Bahngeschwindigkeit

$$v = r\,\omega = R\sin\varphi\,\omega$$

Daher lautet die kinetische Energie

$$dE_{\text{kin}} = \frac{dm}{2}\,v^2 = \frac{m\,d\varphi}{4\,\pi}\left(R\sin\varphi\,\omega\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad E_{\text{kin}} = \frac{m\,R^2\,\omega^2}{4\,\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\,R^2\cdot\omega^2$$

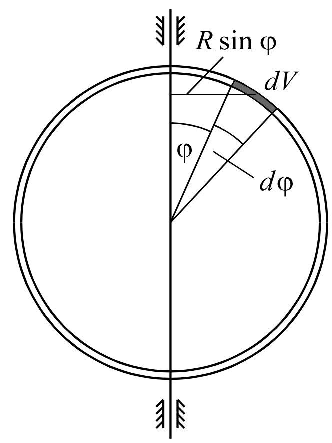

Abb. 4.3-3 Wir betrachten ein infinitesimales Element des Ringes

Aufgabe 4.3-3

Ein homogener **Vollzylinder** mit Masse m, Länge l, Radius R und Dichte ρ rotiert mit der Drehzahl n um seine Symmetrieachse. Wie groß ist seine kinetische Energie?

Hinweis: Die Dichte ρ darf nur in der Rechnung, **nicht** aber **im Endergebnis** vorkommen.

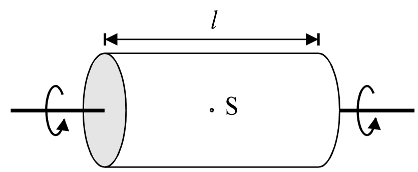

Abb. 4.3-4 Der Zylinder rotiert um seine Symmetrieachse.

Lösung:

Wir betrachten ein **dünnes hohles Rohr** mit Länge l, Radius $r < R$ und infinitesimaler Wanddicke dr. Alle Massenelemente des dünnen Rohres haben dieselbe Geschwindigkeit $v = \omega\, r$.

Die infinitesimale kinetische Energie des dünnen Hohlrohres lautet

$$dT = \frac{dm}{2}\left(\omega\, r\right)^2 = \frac{\rho\, l\, 2\,\pi\, r\, dr}{2}\left(\omega\, r\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad T = \rho\, l\, \pi\, \omega^2 \int_0^R r^3\, dr = \rho\, l\, \pi\, \omega^2\, \frac{R^4}{4} \underset{m\,=\,\rho\, V}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{m\, R^2}{2}\,\omega^2 \qquad \text{mit} \qquad \omega = 2\,\pi\, n$$

Aufgabe 4.3-4

Ein homogener, dünner Stab mit Länge l und Masse m ist mit dem **festen** Winkel φ an eine vertikale Achse angeschweißt, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Hochachse rotiert.
Berechne die kinetische Energie des Stabes.

Hinweis: Die dargestellte x-Achse ist **fest** mit dem rotierenden Stab verbunden.

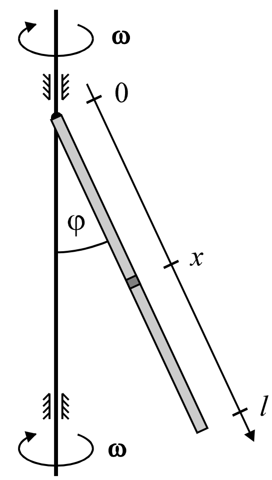

Abb. 4.3-5 Der massive Stab ist an der rotierenden Hochachse angeschweißt.

Lösung:

Wir betrachten ein infinitesimales Längenelement dx des Stabes mit Koordinate x (siehe das kleine dunkelgraue Flächenelement in Abb. 4.3-5). Seine infinitesimale Masse dm und seine infinitesimale kinetische Energie lauten:

$$dm = m \frac{dx}{l}$$

$$dE_{\text{kin}} = \frac{dm}{2} (\omega\, l \sin\varphi)^2 = \frac{m\,(l \sin\varphi)}{2\,l}\, x^2\, dx$$

$$\Rightarrow \qquad E_{\text{kin}} = \frac{m\,(\omega \sin\varphi)^2}{2\,l} \int_0^l x^2\, dx = \frac{m}{6} (\omega\, l \sin\varphi)^2$$

Aufgabe 4.3-5

Eine **kleine** Kugel mit vernachlässigbarem Radius R_{Kugel} und Masse m rollt ohne Schlupf und **reibungsfrei** mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 gegen einen Anhöhe, die aus zwei Achtelkreisbögen besteht mit den gleichen Radien R (siehe die Abb. 4.3–6).

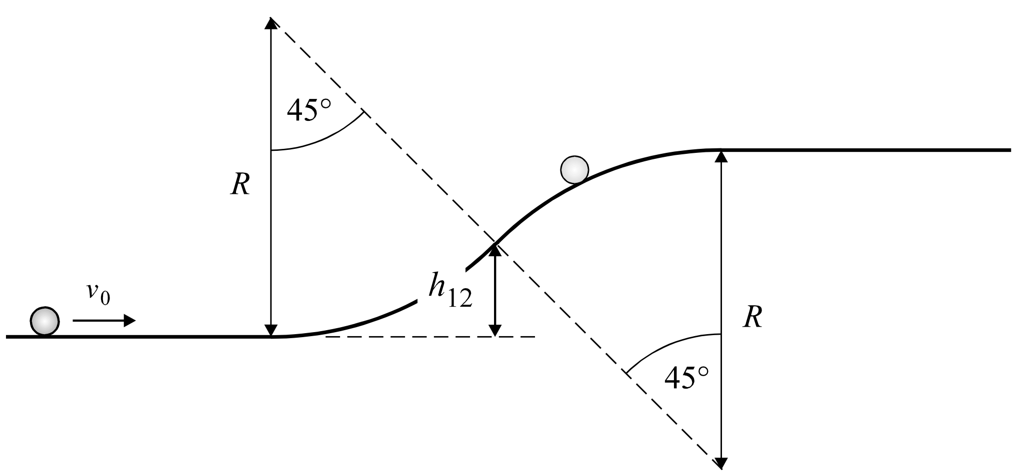

Abb. 4.3-6 Die reibungsfrei rollende Kugel darf nicht vom Boden abheben.

Wie groß darf die Geschwindigkeit v_0 höchstens sein, damit die Kugel **nirgendwo** auf der Anhöhe vom Boden abhebt?

Gegeben: R, m Gesucht: Maximales v_0

Hinweis: Die Kugel ist relativ klein, so dass ihr Radius vernachlässigbar ist: $R_{\text{Kugel}} << R$

Lösung:

Physikalische Erklärung: Die Kugel hebt vom zweiten, d. h. höheren Achtelkreisbogen ab, wenn die Zentrifugalkraft (Fliehkraft) größer ist als die Komponente der Schwerkraft in radiale Richtung. Auf dem 2. Achtelkreisbogen

- sind die Geschwindigkeit und damit die Fliehkraft am Anfang am größten und
- ist die radiale Komponente der Gewichtskraft am Anfang am kleinsten.

Die kritische Kräfte-Bedingung fürs Abheben wird also am ehesten am Übergang vom 1. zum 2. Achtelkreisbogen erfüllt.

Die Kräfte-Bedingung für das Nicht-Abheben lautet:

$$\underbrace{\cancel{m}\,\frac{v_{12}^2}{R}}_{\text{Fliehkraft}} \leq \underbrace{\cancel{m}\,g\cos 45°}_{\substack{\text{radiale Komponente}\\ \text{der Gewichtskraft}}} \qquad \Leftrightarrow \qquad v_{12} \leq \sqrt{R\,g\cos 45°} \tag{1}$$

Nach dem Energiesatz gilt:

$$\frac{\cancel{m}}{2}v_0^2 = \frac{\cancel{m}}{2}v_{12}^2 + \cancel{m}\,g\,h_{12} = \frac{\cancel{m}}{2}v_{12}^2 + R\,\cancel{m}\,g\left(1-\cos 45°\right)$$

$$\Rightarrow \qquad v_{12} = \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,R\left(1-\cos 45°\right)}$$

Mit der Kräfte-Bedingung in Gl. (1) ergibt sich die Bedingung für das Abheben:

$$\sqrt{v_0^2 - 2\,g\,R\left(1-\cos 45°\right)} \leq \sqrt{R\,g\cos 45°}$$

$$\Rightarrow \qquad v_0^2 - 2\,g\,R\left(1-\cos 45°\right) \leq R\,g\cos 45°$$

$$\Rightarrow \qquad v_0 \leq \sqrt{g\,R\left(2-\cos 45°\right)} \approx 1{,}13705\sqrt{g\,R}$$

$$\Rightarrow \qquad v_{0;\max} \approx 1{,}13705\sqrt{g\,R}$$

<u>Aufgabe 4.3-6</u>

Eine kleine Kugel rollt **reibungsfrei** mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ aus der Höhe h_0 eine Parabel hinab mit der Form

$$y(x) = a\,x^2$$

Im Scheitelpunkt der Parabel hebt die Kugel von der Unterlage ab. Aus welcher Höhe h_0 muss die Kugel mindestens hinab rollen, wenn sie noch über die Mauer fliegen soll?

Gegeben: $s\,,\, a\,,\, m\,,\, \mu = 0\,,\, v_0 = 0$

Hinweis: Die Ausdehnung der **kleinen** Kugel und die Breite der Mauer können vernachlässigt werden.

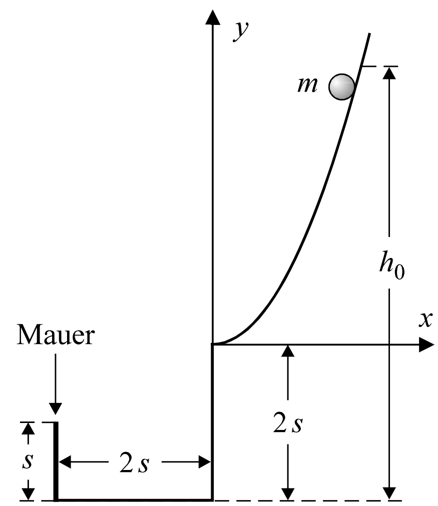

Abb. 4.3–7 Die Kugel rutscht reibungsfrei eine Parabel hinab und soll anschließend über die Mauer fliegen.

Lösung:

Im <u>Sch</u>eitelpunkt der Parabel ist die Geschwindigkeit der Kugel **horizontal** mit dem Betrag

$$v_{\text{Sch}} = \sqrt{2\,g\left(h_0 - 2\,s\right)}$$

Die Flugzeit bis zur Mauer beträgt

$$T = \frac{2\,s}{v_{\text{Sch}}} = \frac{2\,s}{\sqrt{2\,g\left(h_0 - 2\,s\right)}}$$

In dieser Zeit fällt die Masse um die Strecke

$$\frac{g}{2}\,T^2 = \frac{g}{2}\,\frac{4\,s^2}{2\,g\left(h_0 - 2\,s\right)} = \frac{s^2}{h_0 - 2\,s} \overset{!}{<} s$$

$\Rightarrow \qquad h_0 > 3\,s$

<u>Aufgabe 4.3–7</u> **<u>Rutschpartie</u>**

Ein Körper mit der Masse m rutscht aus der <u>Ruhelage</u> einen ebenen Hang mit dem Steigungswinkel $30°$ hinab und stößt nach der Strecke s_0 auf eine Feder mit Federkonstante D. Zwischen Körper und Untergrund besteht Gleitreibung mit der Gleitreibungszahl μ.

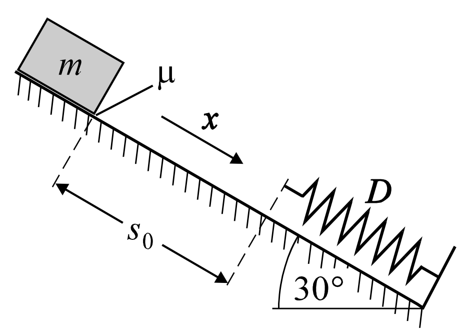

Abb. 4.3–8 Die Masse m rutscht mit Gleitreibung den ebenen Hang hinab und drückt unten die <u>F</u>eder maximal um die Strecke s_F zusammen.

Die Feder wird durch den Aufschlag des Körpers maximal um die Strecke s_{F} zusammengedrückt.

Stelle eine oder mehrere Gln. auf, mit der (mit denen) die Strecke s_{F} berechnet werden kann. Die Gl. muss (Gln. müssen) **nicht** nach s_{F} **aufgelöst** werden.

Lösung:

Die Lageenergie der Masse *m* im Schwerefeld der Erde soll im tiefsten Punkt der Bewegung, also bei maximal zusammengedrückter Feder null sein.

Nach dem **allgemeinen Energiesatz** wird die potentielle Anfangsenergie in Federenergie und in Reibungsenergie (Wärme) umgewandelt:

$$\underbrace{m\,g\left(s_0 + s_{\mathrm{F}}\right)\sin 30°}_{\text{Energie in der Ausgangslage}} = \underbrace{\frac{D}{2}\,s_{\mathrm{F}}^2 + \underbrace{\mu\,m\,g\cos 30°}_{\text{Reibungskraft}}\left(s_0 + s_{\mathrm{F}}\right)}_{\text{Energie im tiefsten Punkt der Bewegung}}$$

5.1 Kraftstoß

Aufgabe 5.1–1 Pendelstoß

Ein Pendel mit Pendellänge l und Punktmasse m hängt direkt vor einer Wand. Dann wird das Pendel ausgelenkt und dabei um die Strecke s von der Wand entfernt. Es wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ losgelassen. Der elastische Stoß mit der Wand dauert die kurze Zeit Δt.

a) Wie groß ist die Höhenänderung Δh des Massenpunktes bei der Auslenkung als Funktion der gegebenen Größen l, s ?

b) Mit welchem Impuls p_0 prallt das Pendel gegen die Wand?

c) Berechne die mittlere Kraft $\overline{F}$ des Pendels auf die Wand während des Kraftstoßes der Dauer Δt.

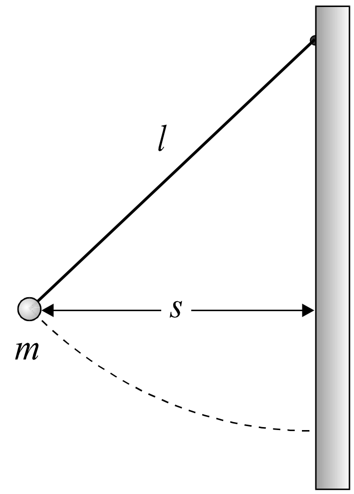

Abb. 5.1–1 Nach dem Loslassen stößt das Pendel gegen die Wand.

Gegeben: $m, l, s, \Delta t$. Alle Ergebnisse dürfen nur von diesen vier Variablen abhängen.

Lösung:

a) $$\Delta h = l\left(1 - \cos\alpha\right) = l\left[1 - \sqrt{1 - \sin^2\alpha}\right] = l\left[1 - \sqrt{1 - \frac{s^2}{l^2}}\right]$$

oder $$\Delta h = l\left[1 - \cos\left(\arcsin\frac{s}{l}\right)\right]$$

b) Für die Bewegung vor dem Aufprall gilt der Energiesatz der Mechanik:

$$m\,g\,\Delta h = \frac{m}{2}v_0^2$$

$$\Rightarrow \quad m\,v_0 = p_0 = m\sqrt{2\,g\,\Delta h} = m\sqrt{2\,g\,l\left[1 - \sqrt{1 - \frac{s^2}{l^2}}\right]}$$

c) Beim Aufprall ändert die Punktmasse ihren Impuls von p_0 auf $-p_0$, also um $2\,p_0$. Daher beträgt die mittlere Kraft beim Kraftstoß

$$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2\,p_0}{\Delta t} = \frac{2\,m}{\Delta t}\sqrt{2\,g\,l\left[1 - \sqrt{1 - \frac{s^2}{l^2}}\right]}$$

5.2 Impulssatz

Aufgabe 5.2-1

Eine Granate mit der Masse m fliegt mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 in die positive x-Richtung. Sie explodiert in zwei verschieden schwere Teile. Wie groß sind die Masse m_1 und die Geschwindigkeit u_2 ?

Hinweis: Gewichtskräfte sollen **vernachlässigt** werden.

Gegeben: $m, v_0, u_1, \alpha_1 = \pi/2, \alpha_2$

Gesucht: m_1, u_2

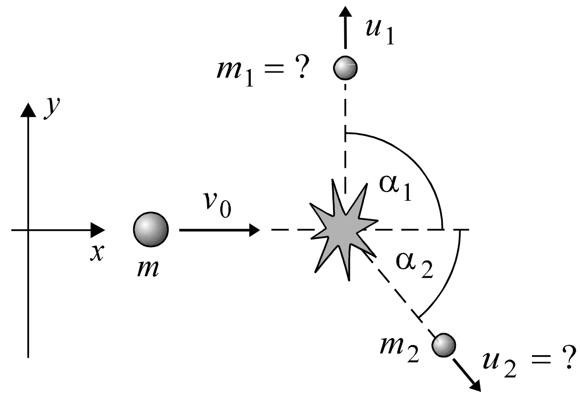

Abb. 5.2-1 Explosion einer Granate.

Lösung:

Der Impuls ist konstant, da keine äußeren Kräfte wirken. Daher gilt für die

x-Richtung: $m\, v_0 = m_2\, u_2 \cos\alpha_2$

y-Richtung: $0 = m_1\, u_1 - m_2\, u_2 \sin\alpha_2$

$$\Rightarrow \qquad m_1 = m\,\frac{v_0}{u_1}\tan\alpha_2$$

$$u_2 = \frac{v_0}{\cos\alpha_2 - \dfrac{v_0}{u_1}\sin\alpha_2} = \frac{u_1}{\dfrac{u_1}{v_0}\cos\alpha_2 - \sin\alpha_2}$$

Aufgabe 5.2-2 Federkanone

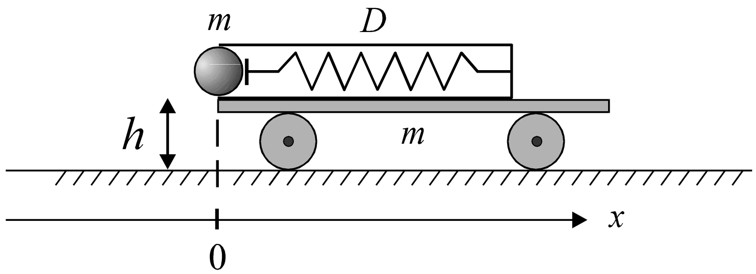

Abb. 5.2-2 Kurze Zeit nach dem Lösen der Feder verlässt die Kugel die Federkanone an der Stelle $x = 0$. Dieser Augenblick, in dem die Feder die Dehnung Null hat, wird hier dargestellt.

Auf einem **stehenden** Wagen ist eine horizontal ausgerichtete Federkanone montiert. Wagen und Kanone haben zusammen die Masse *m*. Die Feder mit Federkonstante *D* ist um die Strecke *s* zusammengedrückt und in dieser Stellung eingeklemmt. Vor der Feder liegt eine Kugel mit gleicher Masse *m*. Wagen und Kugel sind also gleich schwer. Zu einer bestimmten Zeit wird die Sperrung der Feder aufgehoben und die Kugel wird abgefeuert. Wenn die Kugel das Ende des „Kanonenrohres" verlässt, dann abhebt sie von der Feder ab und hat die x-Koordinate Null; dieser Augenblick wird in Abb. 5.2-2 dargestellt.

Bei welcher Koordinate x_A schlägt die Kugel auf dem Boden auf?

Gegeben: m , D , s , Höhe h .

Lösung:

Die Geschwindigkeiten von Wagen und Kugel nach dem Abschuss berechnen sich mit dem mechanischen **Energieerhaltungssatz** und mit dem **Impulserhaltungssatz**:

Energieerhaltungssatz: $\frac{D}{2} s^2 = \frac{m}{2} u_W^2 + \frac{m}{2} u_K^2$

Impulserhaltungssatz: $0 = m \left(u_W + u_K \right)$

$$\Rightarrow \qquad u_K = -\sqrt{\frac{D}{2\,m}}\, s$$

Die Fallzeit t_F der Kugel berechnet sich wie folgt:

$$\frac{g}{2} t_F^2 = h \qquad \Rightarrow \qquad t_F = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$$

In dieser Zeit legt die Kugel folgenden Weg in horizontaler Richtung zurück:

$$x_A = u_K\, t_F = -\sqrt{\frac{D\,h}{g\,m}}\, s$$

Aufgabe 5.2-3 Gewehrkugel

Ein Pendel mit Masse m_2 und Pendellänge l wird um den Winkel $\beta_0 = 60°$ ausgelenkt und dann mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ losgelassen.

Im tiefsten Punkt wird die Pendelmasse m_2 – nach links schwingend – von einer Gewehrkugel mit Masse m_1, die mit der unbekannten Geschwindigkeit $v_1 = ?$ nach rechts fliegt, getroffen. Die Kugel durchdringt die Pendelmasse und fliegt danach mit der Geschwindigkeit u_1 in horizontaler Geschwindigkeit weiter. Das Pendel bleibt in der tiefsten Lage stehen: $u_2 = 0$.

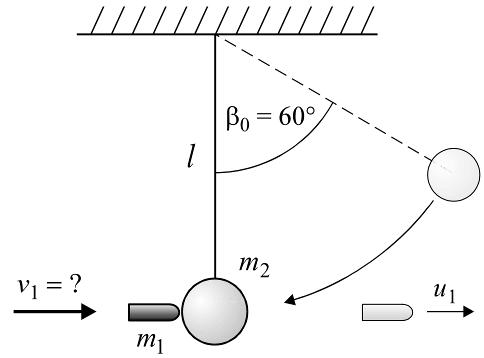

Abb. 5.2-3 Die Anfangslage und die Kugel nach dem Durchschlag sind hell und dünn gezeichnet.

Gegeben: $m_1, m_2, l, u_1, u_2 = 0$

Gesucht: v_1

Lösung:

Nach dem Energieerhaltungssatz hat die Pendelmasse im tiefsten Punkt vor dem Aufschlag die Geschwindigkeit

$$v_2 = -\sqrt{2\,g\,h} = -\sqrt{2\,g\,l\,(1-\cos 60°)} = -\sqrt{g\,l}$$

Für den Durchschlag gilt der Impulssatz:

$$m_1\,v_1 - m_2\sqrt{g\,l} = m_1\,u_1$$

$$\Rightarrow \qquad v_1 = u_1 + \frac{m_2}{m_1}\sqrt{g\,l}$$

Aufgabe 5.2-4 Sprung auf stehenden Wagen

Ein Mann mit Masse m_1 läuft mit der Geschwindigkeit v_0 auf einen stehenden Wagen der Masse m_2 zu und springt mit der horizontalen Geschwindigkeit v_0 auf den stehenden Wagen. Nach der Landung rutscht der Mann mit der Gleitreibungszahl μ auf dem Wagen entlang und kommt nach kurzer Strecke auf dem Wagen zum Stehen.

a) Wie groß ist die gemeinsame Geschwindigkeit von Mann und Wagen nach Beendigung des Rutschens?

b) Wie groß ist die Beschleunigung a des Mannes während des Rutschens?

c) Welche Zeit T dauert das Rutschen?

d) Welche Strecke s legt der Wagen in dieser Zeit T zurück?

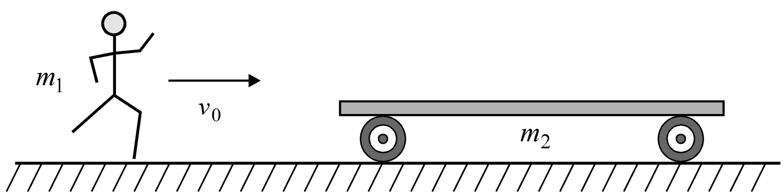

Abb. 5.2-4 Der Mann springt mit horizontaler Geschwindigkeit v_0 auf den stehenden Wagen.

Lösung:

a) Laut Impulssatz gilt:

$$m_1 v_0 = \left(m_1 + m_2\right) u \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

b) Während des Rutschens hat der Mann die konstante negative Beschleunigung

$$a = -\frac{F_\mathrm{R}}{m_1} = -\frac{\mu m_1 g}{m_1} = -\mu g$$

c) Für die Berechnung der Rutschzeit T gibt es zwei Lösungsmethoden:

1. Methode: Im Erdsystem gilt für die gleichförmig beschleunigte Bewegung des Läufers während des Rutschens:

$$v_\mathrm{Mann}(t) = v_0 - \mu g t$$

$$\Rightarrow \qquad v_\mathrm{Mann}(T) = u = v_0 - \mu g T \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{v_0 - u}{\mu g} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_0}{\mu g}$$

2. Methode: Für den Wagen gilt:

$$v_\mathrm{Wagen}(t) = 0 + a_\mathrm{Wagen}\, t = \frac{\mu m_1 g}{m_2} t$$

$$\Rightarrow \qquad u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{\mu\, m_1\, g}{m_2} T \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_0}{\mu\, g}$$

d) $$x_{\text{Wagen}}(T) = s = \frac{a_{\text{Wagen}}}{2} T^2 = \frac{\mu\, m_1\, g}{2\, m_2} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_0}{\mu\, g} \right)^2 =$$

$$= \frac{m_1\, m_2}{\left(m_1 + m_2\right)^2} \frac{v_0^2}{2\, \mu\, g}$$

<u>Aufgabe 5.2–5</u>

Ein Pendel mit Masse m und Pendellänge l schwingt reibungsfrei aus der Anfangslage mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi_0 = 90° \qquad \dot{\varphi}_0 = 0$$

herab und stößt im tiefsten Punkt <u>zentral</u> auf ein Teilchen Nr. 2 mit <u>gleicher</u> <u>Masse</u> m, das reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene rutschen kann. Beim zentralen Stoß wird die *<u>Hälfte</u> der vorher vorhandenen kinetischen Energie in Wärme umgewandelt.*

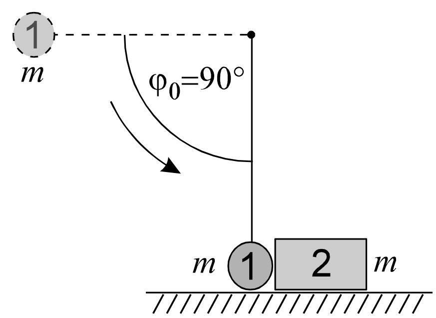

Abb. 5.2–5 Die Pendelmasse 1 stößt zentral auf die ruhende Masse 2.

a) Wie groß sind die Geschwindigkeiten u_1 vom Pendel und u_2 der gestoßenen Masse Nr. 2 nach dem Zusammenstoß?

b) Bis auf welche Höhe h_{nach} – gemessen ab dem tiefsten Punkt – schwingt das Pendel <u>nach</u> dem Stoß hoch?

Lösung:

a) Nach dem Energiesatz stößt die Pendelmasse mit der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\, g\, h} = \sqrt{2\, g\, l}$$

auf die ruhende Masse Nr. 2. Für den Stoß gelten der Impulssatz und der allgemeine Energiesatz:

Impulssatz:

$$m\, v = m\,(u_1 + u_2) \tag{1}$$

Allgemeiner Energiesatz:

$$\frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right) + \text{Wärme} = \frac{m}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right) \cdot 2 =$$

$$= m\left(u_1^2 + u_2^2\right) \qquad (2)$$

Die Gln. (1) und (2) führen auf

$$u_1 = u_2 = \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{g\,l}{2}}$$

b) Nach dem Energiesatz schwingt das Pendel auf die Höhe

$$h_{\text{nach}} = \frac{l}{4}$$

hoch.

Aufgabe 5.2–6 Sprung auf eine Lore

Ein Mann mit der Masse m_M springt **horizontal** aus der Höhe h_0 mitten auf eine kleine Lore mit der Masse m_L, die in der Entfernung s steht. Die Lore kann reibungsfrei rollen.

a) Wie groß ist die Fallzeit T_F ?

b) Welche Geschwindigkeit v_{Lore} hat die Lore nach der Landung des Mannes?

c) Welche mechanische Energie E_{Bein} muss der Mann bei der Landung mit seinen Beinen aufnehmen bzw. in seinen Beinen absorbieren?

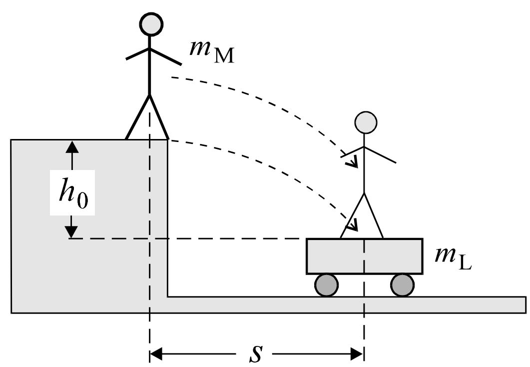

Abb. 5.2–6 Der Mann springt mitten auf die stehende Lore. Die Anfangsgeschwindigkeit des Mannes ist horizontal.

Gegeben: m_M, m_L, h_0, s

Lösung:

a) Für die Fallzeit gilt:

$$\frac{g}{2}\,T_F^2 = h_0 \qquad \Rightarrow \qquad T_F = \sqrt{\frac{2\,h_0}{g}}$$

b) Beim Sprung ist die Bewegung in horizontaler Richtung gleichförmig und in vertikaler Richtung gleichförmig beschleunigt. In der Zeit T_F muss der Mann in horizontaler Richtung die Strecke s zurücklegen. Folglich beträgt die horizontale Sprunggeschwindigkeit

$$\dot{x}_{\mathrm{M}} = \frac{s}{T_{\mathrm{F}}} = s\sqrt{\frac{g}{2\,h_0}}$$

Für die Landung gilt der **Impulssatz**:

$$m_{\mathrm{M}}\,\dot{x}_{\mathrm{M}} = \left(m_{\mathrm{L}} + m_{\mathrm{M}}\right) v_{\mathrm{Lore}}$$

$$\Rightarrow \qquad v_{\mathrm{Lore}} = \frac{m_{\mathrm{M}}}{m_{\mathrm{L}} + m_{\mathrm{M}}}\, s\sqrt{\frac{g}{2\,h_0}}$$

c) <u>Vor</u> der Landung beträgt die mechanische Energie

$$E_{\mathrm{vor}} = m_{\mathrm{M}}\, g\, h_0 + \frac{m_{\mathrm{M}}}{2}\left(\frac{s}{T_{\mathrm{F}}}\right)^2 = m_{\mathrm{M}}\, g\, h_0 + \frac{m_{\mathrm{M}}}{2}\,\frac{s^2\, g}{2\,h_0}$$

<u>Nach</u> der Landung beträgt die mechanische Energie

$$E_{\mathrm{nach}} = \frac{m_{\mathrm{L}} + m_{\mathrm{M}}}{2}\, v_{\mathrm{Lore}}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m_{\mathrm{M}}^2}{m_{\mathrm{L}} + m_{\mathrm{M}}}\,\frac{s^2\, g}{2\,h_0}$$

$$E_{\mathrm{Bein}} = E_{\mathrm{vor}} - E_{\mathrm{nach}} = m_{\mathrm{M}}\, g\, h_0 + \frac{m_{\mathrm{L}}\, m_{\mathrm{M}}}{m_{\mathrm{L}} + m_{\mathrm{M}}}\,\frac{s^2\, g}{4\,h_0}$$

7.1 Freie Schwingungen

Aufgabe 7.1-1

In einer fest stehenden kugelförmigen Halbschale mit Innenradius R werden zwei kleine, identische Kugeln mit den **kleinen** Anfangswinkeln 10° und 20° aus der Ruhe losgelassen. Der Radius der Kugeln ist gegenüber R vernachlässigbar klein.

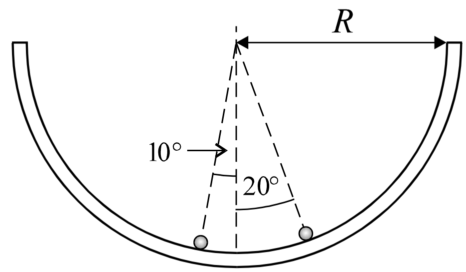

Abb. 7.1-1 Die beiden identischen Kugeln werden mit den Anfangswinkel 10° und 20° aus der Ruhe losgelassen.

a) An welcher Stelle stoßen die Kugeln aufeinander? Welche Zeit T verstreicht vom Loslassen der Kugeln bis zu ihrem Zusammenstoß?

b) Der Zusammenstoß der Kugeln sei elastisch. Bis zu welcher Höhe h_{links} rollt die linke Kugel nach dem **elastischen** Stoß hoch?

Hinweise: **1)** Die Anfangswinkel 10° und 20° sind als *klein* anzusehen. **2)** Überlege, was dieser Versuch mit einem *Pendel* zu tun hat bzw. ob eventuell ein Unterschied zum Pendel besteht.

Lösung:

a) Die beiden Kugeln bewegen sich wie Pendel mit der Pendellänge R. Bei kleinen Pendelschwingungen hängt die Periode nicht von der Schwingungsamplitude ab, so dass sich die Pendel im tiefsten Punkt der Halbschale treffen.

$$T = \frac{1}{4}\, 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

b) Beim zentralen elastischen Stoß gleich schwerer Körper werden die Geschwindigkeiten ausgetauscht.

Daher rollt die linke Kugel bis auf folgende Höhe hinauf:

$$h_{\text{links}} = R\left(1 - \cos 20°\right) \approx 0{,}06031 \cdot R$$

Aufgabe 7.1–2 Pendel

Ein Fadenpendel besteht aus einem masselosen Faden (bzw. einer masselosen Stange) der Länge l, an dessen Ende eine kleine Masse $m = 100\ \text{g}$ befestigt ist.

a) Wie groß muss die Länge l des Fadenpendels sein, damit es bei kleinen Ausschlägen mit der Schwingungsdauer $T = 1\,\text{s}$ pendelt?

Hinweis: Die Reibung ist so klein, dass ihr Einfluss auf die Schwingungs**dauer** in der ganzen Aufgabe vernachlässigt werden kann. Die Reibung verringert im Laufe der Zeit nur den **Ausschlag** des Pendels.

b) Man beobachtet, dass der maximale Ausschlag des Pendels durch geschwindigkeitsproportionale Reibungskräfte in $100\ \mathrm{s}$ von anfangs 5° auf 2° zurückgeht.

Wie groß ist die Abklingkonstante δ?

c) Wie groß ist die Pendelenergie zur Zeit $t = 0$ bei $\varphi_0 = 5°$, $\dot{\varphi}_0 = 0$?

d) Wie groß ist die Pendelenergie nach der **ersten** Schwingungsperiode?

Hinweise: **1)** In den Teilaufgaben c) und d) soll die **potentielle Lageenergie im tiefsten Punkt der Schwingung Null** sein.

2) In den Teilaufgaben c) und d) müssen **keine Zahlenwerte** eingesetzt werden. Als Endergebnis ist in den Teilaufgaben c) und d) jeweils nur eine Formel gesucht.

Lösung:

a) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \Rightarrow \qquad l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \approx 0{,}248\ \mathrm{m}$$

b) Die Abnahme der Schwingungsamplitude $A(t)$ wird durch die Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{-\delta t}$ beschrieben:

$$A(t) = A(0)\,\mathrm{e}^{-\delta t}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta = -\frac{1}{t}\ln\frac{A(t)}{A(0)} = -\frac{1}{100\ \mathrm{s}}\ln 0{,}4 \approx 9{,}163 \cdot 10^{-3}$$

c) Die Anfangsenergie beträgt

$$m\,g\,h_0 = m\,g\,l\left(1 - \cos 5°\right)$$

d) Die gedämpfte Pendelschwingung wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$\varphi(t) = A(0)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t - \alpha)$$

Am Ende der ersten Schwingung erreicht das Pendel die maximale Höhe

$$h_1 = l\left[1 - \cos\left\{5° \cdot \exp\left(-\delta \cdot 1\,\mathrm{s}\right)\right\}\right]$$

Folglich beträgt die Pendelenergie nach der ersten Schwingung, also zur Zeit $t = 1\,\mathrm{s}$

$$E_1 = m\,g\,h_1 = m\,g\,l\left[1 - \cos\left\{5° \exp\left(-\delta \cdot 1\,\mathrm{s}\right)\right\}\right]$$

Aufgabe 7.1–3 Gedämpfte Schwingung

Die Federkonstante D und die Reibungskonstante c eines gedämpften harmonischen Oszillators mit Masse $m = 20\,\mathrm{kg}$ werden durch folgende Vorgaben bestimmt: In der Ruhelage dehnt die Gewichtskraft der Masse die Feder um $s = 8\,\mathrm{cm}$. In einer Schwingungsperiode nimmt die Amplitude auf $2/3$ ihres Anfangswertes ab.

Berechne D und c.

Lösung:

Die Federkonstante D ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht:

$$m\,g = D\,s \qquad \Rightarrow \qquad D = \frac{m\,g}{s} = 2452{,}5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Die Exponentialfunktion

$$\exp(-\delta\,t) = \exp\left(-\frac{c}{2\,m}\,t\right)$$

beschreibt die Abnahme der Amplitude. In unserem Fall gilt:

$$\exp\left(-\frac{c}{2\,m}\,T\right) = \exp\left(-\frac{c}{2\,m}\,\frac{2\,\pi}{\sqrt{\dfrac{D}{m} - \dfrac{c^2}{4\,m^2}}}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{c\,\pi}{m}\,\frac{1}{\sqrt{\dfrac{D}{m} - \dfrac{c^2}{4\,m^2}}} = -\frac{\pi}{m}\,\frac{1}{\sqrt{\dfrac{D}{m\,c^2} - \dfrac{1}{4\,m^2}}} = \ln\frac{2}{3} = -\ln\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{D}{m\,c^2} - \frac{1}{4\,m^2} = \left(\frac{\pi}{m\,\ln 1{,}5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad c = \sqrt{\frac{D\,m}{\left(\dfrac{\pi}{\ln 1{,}5}\right)^2 + \dfrac{1}{4}}} \approx 28{,}5\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

7.2 Erzwungene Schwingungen

Aufgabe 7.2–1 Harmonischer Oszillator mit Erregung

a) Stelle die Bewegungsgl. eines Oszillators auf, bei dem der Aufhängepunkt des Dämpfers harmonisch auf und ab bewegt wird (siehe Abb. 7.1–1).

b) Wie lauten die Resonanzkurven $A(\Omega)$?

c) Abb. 7.2–2 zeigt die Resonanzkurve eines bestimmten Oszillators mit den Parametern

$$m = 1{,}2\ \text{kg} \qquad \text{und} \qquad \delta = \frac{c}{2\,m} = 0{,}2\,\frac{1}{\text{s}}\,.$$

Wie groß ist die Amplitude s_0 der Bewegung des Aufhängepunktes?

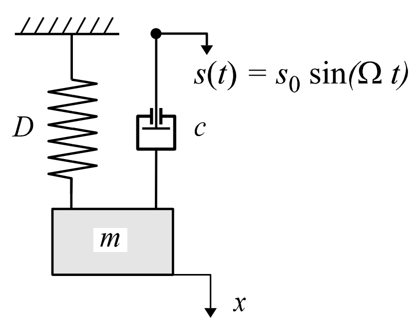

Abb. 7.2–1 Oszillator mit Erregung.

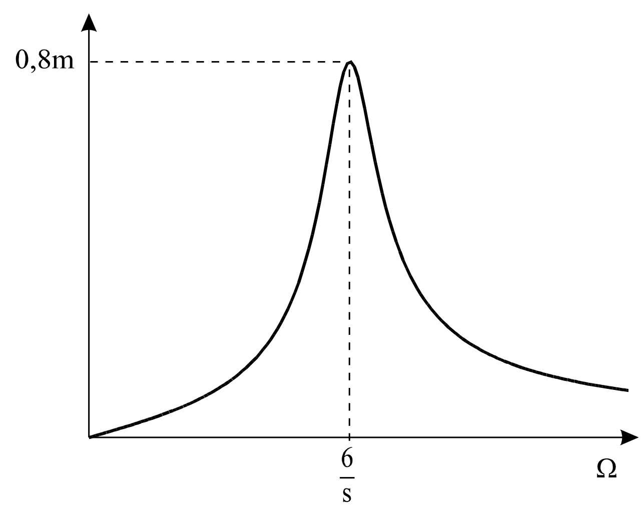

Abb. 7.2–2 Resonanzkurve des betrachteten Oszillators.

Lösung:

a) Die Kraft des Stoßdämpfers ist proportional zur Geschwindigkeit $(\dot{u} - \dot{x})$ des Kolbens im Gehäuse.

$$\Rightarrow \qquad m\,\ddot{x} = -D\,x + c\,(\dot{u} - \dot{x})$$

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + D\,x = c\,\dot{u}(t) = c\,u_0\,\Omega\cos\Omega\,t$$

b) $$A = \frac{\dfrac{c\,s_0\,\Omega}{m}}{\sqrt{\left(\dfrac{D}{m} - \Omega^2\right)^2 + \dfrac{c^2}{m^2}\,\Omega^2}} = \frac{2\,\delta\,s_0\,\Omega}{\sqrt{\left(\dfrac{D}{m} - \Omega^2\right)^2 + 4\,\delta^2\,\Omega^2}}$$

c) $$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \Rightarrow \quad D = m\,\omega_0^2 = 43{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow \quad A\left(6\,\text{s}^{-1}\right) = 0{,}8\,\text{m} = \frac{0{,}4\,\frac{1}{\text{s}^{-1}}\cdot s_0 \cdot 6\,\frac{1}{\text{s}^{-1}}}{\sqrt{\left(\frac{43{,}2}{1{,}2}\,\frac{1}{\text{s}^{-2}} - 36\,\frac{1}{\text{s}^{-2}}\right)^2 + 4\cdot 0{,}04\,\frac{1}{\text{s}^{-2}}\cdot 36\,\frac{1}{\text{s}^{-2}}}} = \frac{2{,}4\cdot s_0}{2{,}4}$$

$$\Rightarrow \quad s_0 = 0{,}8\,\text{m}$$

Aufgabe 7.2–2 Schwingung

Zwei Massen m_1 und $m_2 = m_1/2$ sind fest miteinander verbunden und schwingen auf einer Feder, deren unteres Ende harmonisch auf und ab bewegt wird. Die untere Masse m_1 wird durch zwei Wände reibungsfrei geführt.
Gegeben:

$$m_1 = 2\,\text{kg} \qquad m_2 = 1\,\text{kg} \qquad D = 120\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$u_0 = 5\,\text{cm} \qquad \Omega = 10\,\frac{1}{\text{s}}$$

a) Wie groß ist die Eigenfrequenz des Oszillators?

b) Wie groß ist die Amplitude der stationären Schwingung der beiden Massen?

c) Jetzt wird die obere Masse m_2 weggenommen. Auf welchen Wert muss die Erregerfrequenz geändert werden, damit die in Teil b) berechnete Amplitude der stationären Schwingung beibehalten wird?

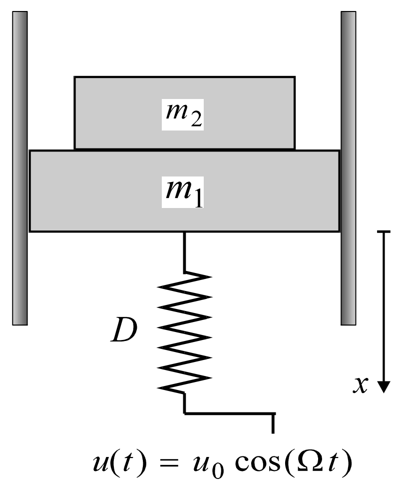

Abb. 7.2–3 Zwei Massen schwingen reibungsfrei auf und ab. Das untere Ende der Feder wird harmonisch mit der Frequenz Ω bewegt.

Lösung:

a) $$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_1 + m_2}} \approx 6{,}32\,\frac{1}{\text{s}}$$

b) Die Amplitude der reibungsfreien, stationären Schwingung lautet allgemein:

$$A(\Omega) = \frac{\dfrac{D\,u_0}{m_1 + m_2}}{\left|\dfrac{D}{m_1 + m_2} - \Omega^2\right|}$$

Daraus folgt in unserem Fall:

$$A\left(10\ \mathrm{s}^{-1}\right) = \frac{\dfrac{120 \cdot 0{,}05\ \mathrm{N}}{3\ \mathrm{kg}}}{\left|\dfrac{120\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{3\ \mathrm{kg}} - \left(10\ \mathrm{s}^{-1}\right)^2\right|} = \frac{1}{30}\ \mathrm{m} \approx 0{,}0\overline{3}\ \mathrm{m}$$

c) $$\frac{1}{30}\ \mathrm{m} = \frac{\dfrac{120 \cdot 0{,}05\ \mathrm{N}}{2\ \mathrm{kg}}}{\left|\dfrac{120\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{2\ \mathrm{kg}} - \Omega^2\right|} \quad \Rightarrow \quad \left|60\ \frac{1}{\mathrm{s}^2} - \Omega^2\right| = 90\ \frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega = \sqrt{150}\ \frac{1}{\mathrm{s}} \approx 12{,}247\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

<u>Aufgabe 7.2–3</u>

Bemerkung: In dieser Aufgabe können alle Teilaufgaben a, b, c, d, e unabhängig voneinander gelöst werden.

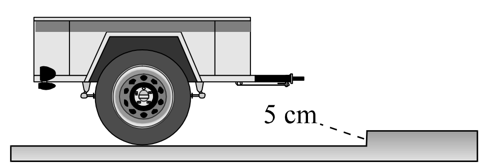

Abb. 7.2–4 Der Anhänger fährt über eine Fräskante der Höhe 5 cm.

Ein Anhänger kann analog zur Vorlesung als gedämpfter harmonischer Oszillator angesehen werden mit einer Feder und einem Stoßdämpfer. Die Masse der Räder wird vernachlässigt.

Der Anhänger der Masse $m = 400\ \mathrm{kg}$ befährt eine schlechte Straße, in der sich eine stufenförmige Erhöhung (z. B. eine Fräskante) der Höhe 5 cm befindet.

Die Feder des Anhängers hat die Gesamtfederkonstante $D = 6 \cdot 10^4\ \mathrm{N/m}$ und der Stoßdämpfer die Gesamtdämpfungskonstante c. (c wird ist <u>nicht</u> gegeben!)

a) Wie stark werden die beiden Federn bei stehendem, unbeladenem Anhänger zusammengedrückt?

b) Der Anhänger sei nun einige Jahre alt, so dass die Abklingkonstante nur noch $\delta' = 5/\mathrm{s}$ beträgt. Mit welcher Frequenz schwingt das Fahrzeug nach Überfahren der Fräskante gedämpft auf und ab?

c) Wie lange dauert es bei der Abklingkonstante $\delta' = 5/\mathrm{s}$, bis die Schwingungsamplitude nach Überfahren der Fräskante auf 10% des Anfangswertes abgefallen ist?

d) Einige Jahre später ist der Stoßdämpfer des Anhängers vollständig ausgefallen:

$$c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta = 0$$

Nun rollt der Anhänger auf einer Straße, die cosinusförmig gewellt ist („Wellblechpiste“). Die Bodenwellen folgen im Abstand $l = 11\ \mathrm{m}$ und weisen einen Höhenunterschied vom Minimum zum Maximum von $h = 5\,\mathrm{cm}$ auf.

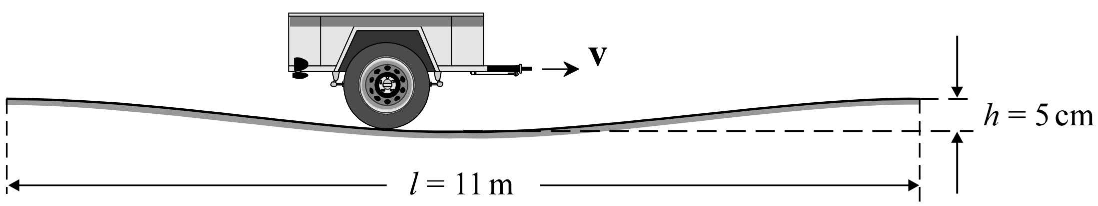

Abb. 7.2–5 Der Anhänger fährt mit ausgefallenem Stoßdämpfer ($c = 0$) über eine ‘Wellblechpiste’.

Wie groß ist die vertikale Schwingungsamplitude des Anhängers bei einer konstanten Geschwindigkeit von $v = 72\ \mathrm{km/h}$?

Lösung:

a) $$x_{\mathrm{Gl}} = \frac{m\,g}{D} = 6{,}54\ \mathrm{cm}$$

b) $$\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \delta'^2} = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^4}{400} - 25}\ \frac{1}{\mathrm{s}} \approx 11{,}180\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

c) Die Abnahme der Schwingungsamplitude wird durch die Funktion $\exp(-\delta'\,t)$ beschrieben. Daher muss gelten:

$$\exp(-\delta'\,t_{1/2}) = 0{,}1$$

$$\Rightarrow \qquad t_{1/2} = \frac{\ln 10}{\delta'} \approx \frac{2\ \ln 10}{5\ \frac{1}{\mathrm{s}}} \approx 0{,}9210\ \mathrm{s}$$

d) Der Fußpunkt der Feder wird durch die Straße harmonisch auf und ab bewegt mit der Amplitude $A_{\mathrm{Fußpunkt}} = 0{,}025\ \mathrm{m}$ und mit der Frequenz

$$\Omega = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{2\,\pi}{l\,/\,v} = 2\,\pi\,\frac{20\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{11\ \mathrm{m}} \approx 11{,}424\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Für diese Frequenz und für $c = 0$ lautet die Schwingungsamplitude:

$$A(\Omega) = \frac{\dfrac{D\,A_{\text{Fußpunkt}}}{m}}{\left|\dfrac{D}{m} - \Omega^2\right|} \approx 19{,}24\ \mathrm{cm}$$

11 Ideale Gasgl.

Aufgabe 11-1

15 m unter der Oberfläche eines Sees entsteht bei $4\,°\mathrm{C}$ Wassertemperatur eine Gasblase von 2 mm Durchmesser. An der Oberfläche herrscht der normale Luftdruck $p_{\mathrm{L}} = 1\ \mathrm{bar}$ bei der Wassertemperatur $24\,°\mathrm{C}$. Welchen Durchmesser hat die Gasblase unmittelbar unter der Wasseroberfläche?

Lösung:

Im 15 m Wassertiefe beträgt der Gasdruck

$$p_{15} = p_{\mathrm{L}} + \rho\,g\,h = 1 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} + 1 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 15\ \mathrm{m} =$$

$$= 2{,}4715 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \approx 2{,}47\ \mathrm{bar}$$

Laut idealer Gasgl. gilt:

$$\frac{p_{15}\,V_{15}}{T_{15}} = \frac{p_{\mathrm{L}}\,V_0}{T_0}$$

$$\Rightarrow \qquad V_0 = \frac{p_{15}}{p_{\mathrm{L}}}\,\frac{T_0}{T_{15}}\,V_{15} = 2{,}4715 \cdot \frac{295{,}15\ \mathrm{K}}{277{,}15\ \mathrm{K}} \cdot \frac{\pi}{6}\left(2 \cdot 10^{-3}\right)^3 \approx$$

$$\approx 11{,}02497\ \mathrm{mm}^3$$

$$\Rightarrow \qquad d_0 = \left(\frac{6\,V_0}{\pi}\right)^{1/3} \approx 2{,}7614\ \mathrm{mm}$$

12 Kinetische Gastheorie

Aufgabe 12–1 Versuchsballon

Ein Versuchsballon bringt ein evakuiertes Gefäß mit festem Innenvolumen $V_0 = 0,2\ \mathrm{m}^3$ in die Höhe $h = 25\ \mathrm{km}$. Dort oben beträgt der Druck nach der Internationalen Höhenformel $p_{25} = 0,013\ \mathrm{bar}$.

Das Gefäß wird in der genannten Höhe geöffnet, bis ein Druckausgleich eingetreten ist. Danach wird das Gefäß wieder fest verschlossen. Nach der Rückkehr zur Erde beträgt der Druck im geschlossenen Gefäß $p_{\mathrm{Erde}} = 0,022\ \mathrm{bar}$ bei $\vartheta_{\mathrm{Erde}} = 20\ °\mathrm{C}$.

a) Welche Temperatur ϑ_{25} herrscht in der Höhe $h = 25\ \mathrm{km}$?

b) Welche Wärme Q benötigt die Luft im Gefäß beim Absinken zur Erdoberfläche zur Erhöhung der kinetischen Translationsenergie?

Lösung:

a) Laut idealer Gasgl. gilt:

$$\frac{p_{25}\,\cancel{V_0}}{T_{25}} = \frac{p_{\mathrm{Erde}}\,\cancel{V_0}}{T_{\mathrm{Erde}}}$$

$$\Rightarrow \qquad T_{25} = \frac{p_{25}}{p_{\mathrm{Erde}}}\,T_{\mathrm{Erde}} = \frac{13}{22}\,293{,}15\ \mathrm{K} \approx 173{,}225\ \mathrm{K} \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta \approx -99{,}925\,°\mathrm{C}$$

b) Die Teilchenzahl N ergibt sich aus der idealen Gasgl.:

$$p\,V = N\,k\,T \quad \Rightarrow \quad N = \frac{p\,V}{k\,T} = \frac{0{,}022 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 0{,}2\ \mathrm{m}^3}{1{,}380662 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \cdot 298{,}15\ \mathrm{K}} \approx 1{,}0876 \cdot 10^{23}$$

Die Erhöhung der kinetischen Translationsenergie beträgt

$$\Delta E_{\mathrm{kin}} = N \cdot \frac{3}{2}\,k\,\Delta T \approx 1{,}0876 \cdot 10^{23} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1{,}380662 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\,119{,}925\ \mathrm{K} \approx$$

$$\approx 269{,}99\ \mathrm{J}$$

Aufgabe 12–2 Stahlflasche mit Methangas

In einer Stahlflasche mit 50 Liter Innenvolumen befindet sich Methangas CH_4 bei einem Druck von 75 bar und einer Temperatur von $20°\ \mathrm{C}$. Methan ist in guter Näherung ein ideales Gas.

a) Wie groß ist die Masse des Gases?

b) Wie viele Moleküle enthält das Gas?

c) Wie groß ist die gesamte kinetische Translationsenergie?

Lösung:

a) $$n = \frac{p\,V}{R\,T} = \frac{75 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 0,05\ \mathrm{m}^3}{8,314\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol} \cdot \mathrm{K}} \cdot 293,15\ \mathrm{K}} \approx 153,86\ \mathrm{mol}$$

$\Rightarrow$ $$m = n\,M \approx 153,86\ \mathrm{mol} \cdot 16\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \approx 2,462\ \mathrm{kg}$$

b) $$N = n\,N_\mathrm{A} \approx 153,86\ \mathrm{mol} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\mathrm{mol}} \approx 9,26 \cdot 10^{25}$$

c) $$E_\mathrm{trans} = N\,\frac{m_\mathrm{M}}{2}\,\overline{v^2} = N\,\frac{3}{2}\,k\,T \approx$$

$$\approx 9,26 \cdot 10^{25} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \cdot 293,15\ \mathrm{K} \approx 561,9\ \mathrm{kJ}$$

13.1 Wärme

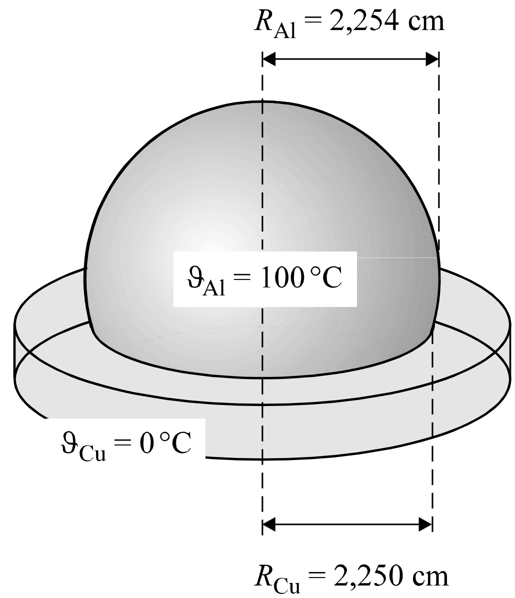

Abb. 13.1–1 Sobald sich der Temperaturausgleich eingestellt hat, fällt die Alu-Kugel durch den Cu-Ring.

Aufgabe 13.1–1

Ein Kupferring hat bei der Temperatur $\vartheta_{Cu} = 0\,°C$ den inneren Radius

$$R_{Cu} = 2{,}250 \text{ cm} .$$

Eine Aluminiumkugel mit der Masse $m_{Al} = 128{,}6$ g hat bei der Temperatur $\vartheta_{Al} = 100\,°C$ den Radius

$$R_{Al} = 2{,}254 \text{ cm} .$$

Nachdem die heiße Kugel über den kalten Ring gelegt wurde, erfolgt ein Temperaturausgleich, d. h. nach einiger Zeit haben beide Körper die gleiche Mischtemperatur ϑ_M. Dann passt die Kugel **genau** durch den Ring.

Stellen Sie alle Gln. auf, mit denen die unbekannte Masse m_{Cu} des Kupferringes berechnet werden kann.

Die Gln. müssen **nicht (!)** nach m_{Cu} aufgelöst werden. (Kostet zuviel Zeit.)

Hinweise: **1)** Der Wärmeaustausch mit der Umgebung wird vernachlässigt.

2) Neben den angegebenen Größen benötigen Sie **von beiden Körpern je zwei Materialkonstanten**. Sie müssen sich selber überlegen, welche Materialkonstanten dies sind.

Lösung:

Wir berechnen zuerst die Mischtemperatur:

$$m_{Cu}\, c_{Cu} \left(\vartheta_M - 0\,°C\right) = m_{Al}\, c_{Al} \left(100\,°C - \vartheta_M\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \vartheta_M = \frac{m_{Al}\, c_{Al} \cdot 100\,°C}{m_{Cu}\, c_{Cu} + m_{Al}\, c_{Al}} \tag{1}$$

Bei dieser Mischtemperatur sind der Innenradius des Ringes und der Radius der Kugel gleich groß:

$$R_{Cu} \left[1 + \alpha_{Cu}\, \vartheta_M\right] = R_{Al} \left[1 + \alpha_{Al} \left(\vartheta_M - 100\,°C\right)\right] \tag{2}$$

Die Kupfermasse m_{Cu} kann mit den beiden Gln. (1/2) bestimmt werden. Die Rechnung ist daher fertig.

Zusatz: Wir lösen die zwei Gln. abschließend noch nach der gesuchten Masse m_{Cu} auf. Dazu setzen wir Gl. (1) in Gl. (2) ein

$$R_{\text{Cu}} \left[1 + \alpha_{\text{Cu}} \frac{m_{\text{Al}}\, c_{\text{Al}} \cdot 100\,°\text{C}}{m_{\text{Cu}}\, c_{\text{Cu}} + m_{\text{Al}}\, c_{\text{Al}}} \right] = R_{\text{Al}} \left[1 + \alpha_{\text{Al}} \left(\frac{m_{\text{Al}}\, c_{\text{Al}} \cdot 100\,°\text{C}}{m_{\text{Cu}}\, c_{\text{Cu}} + m_{\text{Al}}\, c_{\text{Al}}} - 100\,°\text{C} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{m_{\text{Al}}\, c_{\text{Al}} \cdot 100\,°\text{C}}{m_{\text{Cu}}\, c_{\text{Cu}} + m_{\text{Al}}\, c_{\text{Al}}} \left(\alpha_{\text{Cu}} R_{\text{Cu}} - \alpha_{\text{Al}} R_{\text{Al}} \right) = R_{\text{Al}} \left(1 - \alpha_{\text{Al}} \cdot 100\,°\text{C} \right) - R_{\text{Cu}}$$

$$\Rightarrow \qquad m_{\text{Cu}} = \frac{c_{\text{Al}}}{c_{\text{Cu}}} \left(\frac{\alpha_{\text{Cu}} R_{\text{Cu}} - \alpha_{\text{Al}} R_{\text{Al}}}{R_{\text{Al}} \left(1 - \alpha_{\text{Al}} \cdot 100\,°\text{C} \right) - R_{\text{Cu}}} \cdot 100\,°\text{C} - 1 \right) m_{\text{Al}}$$

Mit den Parametern

$$\alpha_{\text{Al}} = 2{,}38 \cdot 10^{-5} \, \frac{1}{°\text{C}} \qquad c_{\text{Al}} = 896 \, \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\alpha_{\text{Cu}} = 1{,}68 \cdot 10^{-5} \, \frac{1}{°\text{C}} \qquad c_{\text{Cu}} = 385 \, \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

finden wir

$$m_{\text{Cu}} \approx 48{,}25 \text{ g}$$

17.1 Wärmeleitung

Aufgabe 17.1-1

Ein Wasserspeicher für Solarenergie ist würfelförmig mit einer Kantenlänge a und wurde zur Isolierung mit einem $d = 20\ \text{cm}$ dicken Styropormantel umgeben. Die Anfangstemperatur des Wassers beträgt $\underline{80°\,\text{C}}$. Die Umgebungstemperatur ist $\underline{15°\,\text{C}}$.

Hinweise:

1) Der Wärmedurchgang von innen nach außen ist im Wesentlichen durch die Wärmeleitfähigkeit der Isolierung bestimmt. Konvektionen werden vernachlässigt

2) Nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz gilt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_2 + \left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right) e^{-\kappa t}$$

mit $$\kappa := \frac{\lambda_{\text{Styropor}}\, A}{m_{\text{Wasser}}\, c_{\text{Wasser}}\, d}$$

$$\lambda_{\text{Styropor}} = 0{,}04\,\frac{\text{W}}{\text{m K}} \qquad A = \text{Oberfläche} \qquad c_{\text{Wasser}} = 4200\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$

Die Dichte ρ des Wassers beträgt $1000\ \text{kg/m}^3$.

a) Wie groß sind in unserem Fall die beiden Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 ?

b) Die Abkühlung von $80°\,\text{C}$ auf $70°\,\text{C}$ soll länger als 30 Tage dauern. Wie groß muss der Speicher mindestens sein? ($a = ?$)

Lösung:

a) $\vartheta_2 = 15°\,\text{C} \qquad \vartheta_1 = 80°\,\text{C}$

b) $$\kappa := \frac{\lambda_{\text{Styropor}}\cdot 6\cdot a^2}{\rho_{\text{Wasser}}\, a^3\, c_{\text{Wasser}}\, d} = \frac{0{,}04\,\frac{\text{W}}{\text{m K}}\cdot 6}{10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 4200\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\cdot 0{,}2\ \text{m}}\,\frac{1}{a} \approx$$

$$\approx 2{,}857\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\frac{1}{a}$$

Die Bedingung für die Kantenlänge a lautet:

$$\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right) e^{-\kappa\cdot 30\ \text{Tage}} = 65°\,\text{C}\cdot\exp\left(-2{,}857\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\frac{1}{a}\cdot 30\cdot 24\cdot 3600\ \text{s}\right) =$$

$$= 55°\,\text{C}$$

$$\Rightarrow \qquad -2{,}857\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\frac{1}{a}\cdot 30\cdot 24\cdot 3600\ \text{s} = \ln\frac{55}{65}$$

$$\Rightarrow \qquad a \approx 4{,}433\ \text{m}$$

17.2 Konvektion

Aufgabe 17.2-1 Wärmeverlust

Ein Mann macht einen kurzen winterlichen Spaziergang mit einer Dauer von 1000 s. Seine Hauttemperatur beträgt $\vartheta_H = 36\,°C$, die Lufttemperatur $\vartheta_L = 6\,°C$. Sein Mantel hat die Dicke 1 cm, die Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0{,}025\ \mathrm{W/(m\,K)}$ (im trockenen Zustand) und bedeckt eine Körperfläche von $0{,}8\ \mathrm{m}^2$. Wegen eines leichten Nieselregens wird der Mantel beim Spaziergang etwas feucht und erhöht dadurch seine Wärmeleitfähigkeit gemäß

$$\lambda(t) \;=\; 0{,}025 \left(1 + \frac{t^2}{3\cdot 10^7\ \mathrm{s}^2}\right) \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}\,.$$

Wie groß ist **näherungsweise** in den 1000 Sekunden der Wanderung der Wärmeverlust durch den Mantel, wenn nur die Wärmeleitung im Mantel und die äußere Konvektion mit $\alpha_K = 25\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$ berücksichtigt wird? Der Wärmeverlust muss nur mit einer **Genauigkeit von 10%** ermittelt werden. (Eine genauere Bestimmung ist zwar schön, ergibt aber keine zusätzlichen Punkte.) Dabei muss in **einer oder höchstens zwei Zeilen** (nicht mehr Zeilen!) kurz begründet werden, warum die Rechnung die erforderliche Genauigkeitsgrenze von 10% einhält.

Lösung:

Die Wärmeleitfähigkeit ändert sich beim Spaziergang nur um etwa 3%. Daher kann der Anfangswert von λ verwendet werden.

$$Q \;\approx\; \frac{A\left(\vartheta_H - \vartheta_L\right) t}{\dfrac{l}{\lambda} + \dfrac{1}{\alpha_K}} \;\approx\; \frac{0{,}8\ \mathrm{m}^2 \cdot 30\ \mathrm{K} \cdot 1000\ \mathrm{s}}{\dfrac{0{,}01\ \mathrm{m}}{0{,}025\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}} + \dfrac{1}{25\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\,\mathrm{K}}}} \;\approx\; 54{,}545\ \mathrm{kJ}$$

Aufgabe 17.2–2

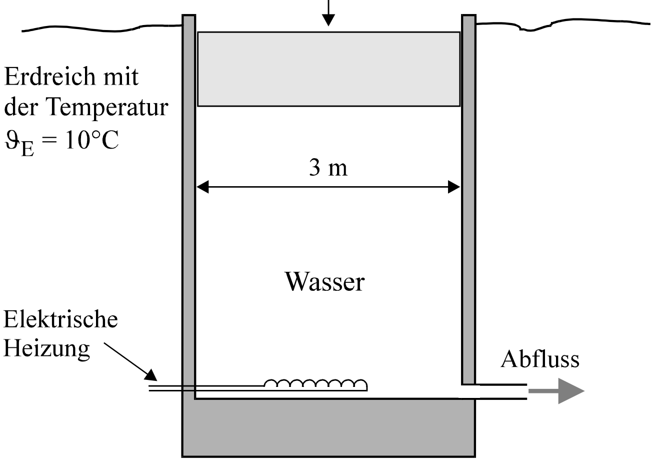

Abb. 17.2–2 In einem Wassertank befindet sich warmes Wasser mit der Temperatur $\vartheta_W = 50\,°\mathrm{C}$. **Wärmeverluste treten nur in den vier Seitenwänden auf**. Die Wasserhöhe fällt quadratisch in der Zeit ab.

Ein rechteckiger Wassertank mit der Grundfläche

$$a^2 = (3\text{ m})^2$$

ist im Erdreich eingegraben und hat auf allen vier Seiten eine Styroporisolierung mit der Dicke $s = 10\text{ cm}$ und mit der Wärmeleitfähigkeit

$$0{,}04\ \mathrm{W(m \cdot K)}$$

Eine elektrische Heizung hält die Wassertemperatur konstant auf $\vartheta_W = 50\,°\mathrm{C}$.

Das Erdreich hat die konstante Temperatur $\vartheta_E = 10\,°\mathrm{C}$. Auf dem Wasser schwimmt ein **sehr dicker** Styroporkolben, so dass Wärmeverluste nach oben vernachlässigt werden können. Auch die Wärmeverluste durch den Boden des Tanks können vernachlässigt werden.

Durch einen Abfluss wird ab der Zeit $t = 0$ Wasser mit steigender Durchflussmenge entnommen, so dass die Höhe der Wassersäule wie folgt fällt:

$$h(t) \;=\; 4\text{ m} - \frac{1\text{ m}}{3600^2}\,\frac{t^2}{\mathrm{s}^2} \qquad \text{für} \quad t > 0$$

Nach zwei Stunden ist der Tank daher leer.

Welche Wärme Q gibt das Wasser bis zur Entleerung des Tanks durch die vier seitlichen Wände an das Erdreich ab?

Hinweise: **(1)** Im Wasser gibt es keine Temperaturschichtung, d. h. die Wassertemperatur ist überall im Tank gleich $50\,°\mathrm{C}$. **(2)** Nur Wärmeleitung durch die 4 Wände ist zu beachten. **Keine Konvektion**.

Lösung:

Im infinitesimalen Zeitintervall $[t\,,\, t + dt]$ wird folgende Wärme abgeführt:

$$dQ \;=\; \lambda\,\frac{A(t)}{s}\,40\text{ K}\cdot dt \;=$$

$$=\; \frac{0{,}04\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\cdot K}}}{0{,}1\text{ m}}\cdot 40\text{ K}\cdot 12\text{ m}\cdot\left(4\text{ m} - \frac{1\text{ m}}{3600^2}\,\frac{t^2}{\mathrm{s}^2}\right) dt \;=$$

$$= 192\ \mathrm{W} \cdot \left[4 - \frac{t^2}{(3600\ \mathrm{s})^2} \right] dt$$

$$\Rightarrow \qquad Q = 192\ \mathrm{W} \cdot \int_0^{7200\ \mathrm{s}} \left[4 - \frac{t^2}{(3600\ \mathrm{s})^2} \right] dt =$$

$$= 192\ \mathrm{W} \cdot \left[4 \cdot 7200\ \mathrm{s} - \frac{(7200\ \mathrm{s})^3}{3 \cdot (3600\ \mathrm{s})^2} \right] = 192\ \mathrm{W} \cdot 7200\ \mathrm{s} \cdot \left[4 - \frac{4}{3} \right] \approx$$

$$= 3{,}6864 \cdot 10^6\ \mathrm{Ws} = 1{,}024\ \mathrm{kWh}$$

Aufgabe 17.2-3 Wärmeverlust in der Außenwand

Die zweischalige Wand eines Hauses hat eine Oberfläche von $180\ \mathrm{m}^2$ und besteht aus einer

- $l_1 = 36\ \mathrm{cm}$ dicken Ziegelwand mit $\lambda_1 = 0{,}16\ \mathrm{W/(m\,K)}$
- und einer Isolierung aus Steinwolle mit Dicke l_2 und mit $\lambda_2 = 0{,}04\ \mathrm{W/(m\,K)}$.

Die Wärmeübergangskoeffizienten sind

$$\alpha_K^{\text{innen}} = 7{,}7\ \mathrm{W/(m^2\,K)} \quad \text{und} \quad \alpha_K^{\text{außen}} = 25\ \mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Wie groß muss die Dicke l_2 der Isolierung mindestens sein, wenn für den Ausgleich der Wärmeverluste, die pro Jahr in der Wand auftreten, pro Jahr höchstens 240 Liter Öl verbraucht werden sollen?

Hinweis: Für Häuser gilt folgende Faustformel: Wenn man den k-Wert einer Außenmauer mit Zehn multipliziert, erhält man den jährlichen Ölverbrauch in Litern, der für die Beheizung eines Quadratmeters der Außenmauer anzusetzen ist. Beispiel: Für $150\ \mathrm{m}^2$ Außenmauer mit $k = 0{,}4\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$ werden jährlich etwa 600 Liter Heizöl benötigt.

Lösung:

Pro Quadratmeter Außenfläche dürfen jährlich höchstens $4/3$ Liter Heizöl verbraucht werden. Daher darf der k-Wert der Außenmauer höchstens

$$k_{\max} = \frac{4}{30} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}$$

sein. Es gilt:

$$k = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_K^{\text{innen}}} + \dfrac{l_1}{\lambda_1} + \dfrac{l_2}{\lambda_2} + \dfrac{1}{\alpha_K^{\text{außen}}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{7{,}7} + \dfrac{0{,}36}{0{,}16} + \dfrac{l_2}{0{,}04}\dfrac{1}{\mathrm{m}} + \dfrac{1}{25}} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{7,7} + \frac{0,36}{0,16} + \frac{l_2}{0,04}\frac{1}{\text{m}} + \frac{1}{25}} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{K}} \approx \frac{1}{2,42 + \frac{l_2}{0,04}\frac{1}{\text{m}}} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{K}} \overset{!}{\leq}$$

$$\overset{!}{\leq} k_{\text{max}} = \frac{4}{30} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{K}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{30}{4} \leq 2,42 + \frac{l_2}{0,04\,\text{m}} \quad \Rightarrow \quad l_2 \geq \left(\frac{30}{4} - 2,42\right) \cdot 0,04\text{ m} \approx 0{,}20\text{ m}$$

Aufgabe 17.2-4 Wärmeübertragung

Die unverputzte Außenmauer eines Raumes ist 60 m^2 groß, 49 cm dick und hat die Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0,18\text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$. Die Raumtemperatur ist zeitlich konstant und beträgt $\vartheta_{\text{R}} = 20°\text{ C}$. Die Außentemperatur steigt in der Zeit von $t = 0$ bis $t_{\text{E}} = 24\text{ h}$ linear mit $0,4°\text{ C/h}$ an:

$$\vartheta_{\text{a}}(t) = -3°\text{ C} + 0,4 \frac{°\text{ C}}{3600\text{ s}}\, t$$

a) Wie groß ist der k-Wert der Mauer? (Konvektion nicht vergessen!)

b) Welche Wärme geht in den 24 besagten Stunden durch die Außenmauer verloren?

Lösung:

a) $$k = \frac{1}{\frac{1}{7,7} + \frac{0,49}{0,18} + \frac{1}{25}} \approx 0,346 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{K}}$$

b) Wir betrachten ein infinitesimales Zeitintervall dt zur Zeit *t*. In diesem Zeitintervall geht folgende Wärme verloren:

$$dQ = \dot{Q}\, dt = k\, A \left[T_{\text{R}} - T_{\text{a}}(t)\right] dt = k\, A \left[23\text{ K} - 0,4 \frac{\text{K}}{3600\text{ s}}\, t\right] dt$$

$$\Rightarrow \quad Q = k\, A \int_0^{t_{\text{E}}} \left[23°\text{ K} - 0,4 \frac{\text{K}}{3600\text{ s}}\, t\right] dt =$$

$$= 0,346 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{K}} \cdot 60\text{ m}^2 \cdot \left[23°\text{ K} \cdot 3600 \cdot 24\text{ s} - 0,2 \frac{\text{K}}{3600\text{ s}} \left(3600 \cdot 24\text{ s}\right)^2\right] =$$

$$\approx 32,64 \cdot 10^6\text{ J}$$